EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

3 juin 2010– **DURÉE 1h30**

La consultation des documents et l'usage des calculettes et des portables sont interdites.
Seules sont autorisées deux feuilles format A4 manuscrites recto-verso

Pour la notation il sera tenu compte de la clarté de l'exposé, de la rigueur du raisonnement et du soin apporté à la copie.

Exercice 1

Soit le système d'équations linéaires

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{0.0.1}$$

avec

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice carrée symétrique, $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{I}_n$ matrice identité d'ordre n

On suppose que les matrices $\mathbf{A}_1+\mathbf{I}_n$ et $\mathbf{A}_1-\mathbf{I}_n$ sont régulières.

(1) Montrer que la solution $\mathbf{x} \in\mathbb{R}^{2n}$ du système (**??**) est de la forme $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix}$, avec $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$.

SOL. On a $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{A}_1\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{u}_2 \Leftrightarrow$ $(\mathbf{A}_1+\mathbf{I}_n)\mathbf{u}_1 = (\mathbf{A}_1+\mathbf{I}_n)\mathbf{u}_2$. Comme $(\mathbf{A}_1+\mathbf{I}_n)$ est régulière, on en déduit que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{x}_1$.

(2) Montrer que la solution du système (**??**) est équivalente à la solution du système $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$.

SOL. Soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix}$ une solution du système. Donc $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$.

(3) On cherche à résoudre le système (**??**) par la méthode itérative suivante :

$$\mathbf{B}\mathbf{x}^{(k+1)} + (\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b};\ k = 0,1,2,\ldots \tag{0.0.2}$$

avec $\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{I}_{2n}$, où $c \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$. On prendra $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ un vecteur initial arbitraire. Déterminer l'intervalle dans lequel doit appartenir c pour que la solution $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$ où $\mathbf{x}$ est solution du système (**??**) et ceci quel que soit $\mathbf{x}^{(0)}$.

SOL. L' itération (**??**) peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{I}_{2n} - c\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + c\mathbf{b};\ k = 0,1,2,\ldots$$

Ce schéma converge si et seulement si le rayon spectral de la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{I}_{2n} - c\mathbf{A}$ est strictement inférieur à 1. Exprimons les valeurs propres de $\mathbf{C}$ en fonction des valeurs propres de **A**. Soit λ une valeur propre de **C** et **v** le vecteur propre associé. On a

$$\mathbf{Cv} = \mathbf{v} - c\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{Av} = \frac{1-\lambda}{c}\,\mathbf{v}$$

Donc les valeurs propres de **A** sont de la forme $\mu = \frac{1-\lambda}{c}$ où λ est une valeur propre de **C**. On doit avoir pour la convergence $\mid \lambda \mid < 1$ ce qui signifie $\mid 1 - c\mu \mid < 1 \Rightarrow -1 < 1 - c\mu < 1 \Rightarrow 0 < c < \frac{2}{\mu}$. Cette inégalité doit être vérifiée pour toute valeur propre de **A**. Par conséquent on a

$$c \in \left]0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right[$$

où $\rho(\mathbf{A})$ est le rayon spectral de **A**.

(4) Soient $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{2n}$ les valeurs propres de **A**. Pour une valeur propre quelconque μ_i de **A**, la valeur propre correspondante λ de **C** est une fonction $\Lambda(c, \mu_i) = 1 - c\mu_i$, avec $0 < c < \frac{1}{\mu_1}$. Posons

$$c_0 = \frac{2}{\mu_1 + \mu_{2n}}$$

Vérifier que $\Lambda(c, \mu_{2n}) = -\Lambda(c, \mu_1)$.

SOL. On vérifie aisement que $\Lambda(c, \mu_{2n}) = \frac{\mu_{2n} - \mu_1}{\mu_1 + \mu_n} = -\Lambda(c, \mu_1)$

(5) Montrer que c_0 minimise la fontion

$$g(c) = \max_{1 \leq i \leq n} \mid \Lambda(c, \mu_i) \mid$$

qui est donc la valeur de c pour laquelle la convergence du schéma itératif (**??**) est la plus rapide.

SOL. On a $\Lambda(c, \mu_{2n}) \geq \cdots \geq \Lambda(c, \mu_1)$. Donc $g(c) = \max_{1 \leq i \leq n} \mid \Lambda(c, \mu_i) \mid = \max\{\mid \Lambda(c, \mu_1) \mid, \mid \Lambda(c, \mu_{2n}) \mid\}$.

On aboutit au résultat en on observant que si $0 < c < \frac{2}{\mu_1 + \mu_{2n}}$, alors $\mid \Lambda(c, \mu_{2n}) \mid \geq \mid \Lambda(c, \mu_1) \mid$ et si $\frac{2}{\mu_1 + \mu_{2n}} < c < \frac{2}{\mu_1}$, alors $\mid \Lambda(c, \mu_1) \mid \geq \mid \Lambda(c, \mu_{2n}) \mid$.

Exercice 2

Élaborer une formule d'approximation pour $y'(0)$ en utilisant les valeurs de $y(0), y(h)$ et $y(2h)$.

SOL. On cherche à avoir $y'(0) = ay(0) + by(h) + cy(2h) + O(h^n)$ où n est un entier, le plus grand possible. En utilisant la formule de Taylor pour $x = 0$, on obtient

$y'(0) = (a+b+c)\,y(0) + (bh+2ch)\,y'(0) + \left(\frac{bh^2}{2} + \frac{c(2h)^2}{2}\right) y''(0) + \left(\frac{6h^3}{6} + \frac{c(2h)^3}{6}\right) y'''(0) + O(h^4)$

On obtient ainsi trois équations avec trois inconnues : $a + b + c = 0$, $bh + 2ch = 1$, $\frac{bh^2}{2} + 2ch^2 = 0$ avec solution $a = -\frac{3}{2h}, b = \frac{2}{h} c = -\frac{1}{2h}$. En introduisant ces valeurs au coefficient de $y'''(0)$ on obient comme coefficient $-\frac{h^2}{3}$. Donc

$$y'(0) = \frac{-3y(0)+4y(h)-y(2h)}{2h} + O\left(h^2\right)$$

Exercice 3

Soit la fonction

$$I(x) = \int_0^1 e^{x^2/2} dx$$

Approximer sa valeur en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre avec $n = 1$.
On donne $w_0 = w_1 = 1, x_1 = -x_0 = 0.577$

Exercice 4

Soit l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t))\,;\, y(t_0) = y_0$$

avec f fonction continue, indéfiniment continûment dérivable.

(1) Montrer que

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\right] + O\left(h^2\right)$$

SOL. On utilise Taylor et on obtient

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + O\left(h^2\right)$$

avec $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\, y'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\, f(t, y(t))$, d'où la formule à établir.

(2) Montrer que la méthode d'intégration numérqiue de Runge-Kutta donnée par le schéma itératif

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}y_k + \frac{h}{2}f_k\right); k = 0, 1, \ldots$$

avec $t_k = t_0 + hk$, $y_k = y(t_0 + hk)$, $f_k = f(t_k, y_k)$, permet de résoudre numérquement le problème avec une précision numérique du second ordre.

SOL. Au 2e terme du second membre on applique Taylor d'ordre 1 :
$y_{k+1} = y_k + h\left[f_k + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_k, y_k) + \frac{h}{2}f_k\frac{\partial f}{\partial y}(t_k, y_k) + O(h)\right] = y_k + hf_k + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_k, y_k)\, f_k\frac{\partial f}{\partial y}(t_k, y_k) + O\left(h^2\right)\right]$
qui est une approximation numérique de y_{k+1} au second ordre.