Exercice 1 Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a} \\ \mathrm{a} & 1 & \mathrm{a} \\ \mathrm{a} & \mathrm{a} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

avec valeurs propres $1 - a$ et $1 + 2a$.

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est symétrique, définie positive si et seulement si $-0.5 < a < 1$.
2. Montrer que la méthode itérative de Jacobi converge vers l'inverse de $\mathbf{A}$ si et seulement si $-0.5 < a < 0.5$.

SOL.- *(1) Si $a = 0$, $\mathbf{A}$ est la matrice identité, donc sym.déf.pos. Si $a \neq 0$, on a que $\mathbf{A}$ est déf.pos. si les valeurs propres sont positives.*

(2) La méthode de Jacobi est $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{X}(n) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(n)$. La méthode converge si et seulement si les valeurs propres de $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ sont en module < 1. Les valeurs propres de $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ sont $-a$ et $2a$. Donc il faut $-1 < a < 1$ et $-1 < 2a < 1$.

Exercice 2 Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & d \\ c & c & c & c & c & c \end{bmatrix}$ et le vectur $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \\ b \end{bmatrix}$.

On suppose que $\mathbf{A}$ st régulière.

Écrire un algorithme (*attention il est demandé un algorithme et non pas un programme*) de résolution du système

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

qui

1. a comme entrées les valeurs a, c, d, b et N ;
2. a comme sortie le vecteur $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$, où $x_j, j = 1, \ldots, N$ sont les composantes d la solution $\mathbf{x}$;

3. <u>n'utilise pas d'autres tableaux que les tableaux **A** et **b**.</u>

Exercice 3 Soit la fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dont on connaît les valeurs aux points suivants

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	0	1	0	1	0

1. Donner la représentation graphique de f.
2. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

SOL.- *Interpolation de Lagrange.* $f(x) = -16x^2 + 8x$ *si* $0 \leq x \leq 0.5$ *et* $f(x) = -16x^2 + 24x - 8$ *si* $0.5 \leq x \leq 1$

Exercice 4 Soit la fonction

$$f(x) = e^x - 0.5 \sin(0.5\pi x) - 1.5$$

1. Montrer qu f a un zéro dans $[0, 1]$ t que ce zéro est unique.
2. Pet-on appliquer la méthode de la bissection pour calculer c zéro ? Justifier votre réponse.

SOL.- *(1)* f *est continue dans* $[0, 1]$ *et* $f(0) \cdot f(1) < 0$. *Donc* f *a un zéro dans* $[0, 1]$ *.Sa dérivée première est*

$$f'(x) = e^x - 0.25\pi \cos(0.5\pi x)$$

et donc

$$f'(x) \geq \min_{x\in[0,1]} e^x - \max_{x\in[0,1]} 0.25\pi \cos(0.5\pi x) = 1 - 0.25\pi > 0$$

Donc f *est strictement monotone dans* $[0, 1]$ *et, par conséquent, le zéro est unique.*

(2) Oui, car le zéro est unique et $f(0) \cdot f(1) < 0$. *La méthode est donc toujours convergente.*

Exercice 5 Soit la fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. On considèr la méthode d'intégration numérique donnée par

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f(\tau) + f(-\tau), \quad \text{avec } \tau \in [0, 1]$$

1. Calculer l'erreur

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - [f(\tau) + f(-\tau)]$$

pour $f(x) = 1, x, x^2$ respectivement. Déterminer l'ordre minimale de la méthode en fonction de τ.

2. Calculer exactement l'integrale

$$\int_{1}^{3} \frac{dx}{x}$$

3. En utilisant la formule numérique calculr la valeur approchée de $\ln 3$ en fonction de τ.

SOL.- *(1) On a* $E(1) = 0\ \forall\tau,\ E(x) = 0\ \forall\tau,\ E\left(x^2\right) = \frac{2}{3} - 2\tau^2 = 0$ *si* $\tau = 1/\sqrt{3}$. *La méthode est toujours au moins d'ordre 1.*

(2) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x} = \ln 3$

(3)On pose $x = y + 2$. *On a* $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{dy}{y+2} = \frac{4}{4-\tau^2} t.$

Exercice 6 Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

avec condition initial $y(0) = 1$.

Calculer les résultats de deux premières itérations de la méthode de Runge d'ordre 4.

On prendra le pas d'intégration égal à 0.1 .

SOL.- $y(0.1) = 0.99,\ \ y(0.2) = 0.961.$