EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE I

22 janvier 2009 – **DURÉE 2h00**

Exercice 1

Considérons une suite de nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$. La moyenne arithmétique est donnée par la formule

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Considérons aussi le calcul itératif

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_k &= \frac{k-1}{k} S_{k-1} + \frac{1}{k} a_k ; k \geq 2 \end{aligned}$$

1. Montrer que les deux formules de calcul M_n et S_n sont équivalentes.
   SOL.- On a $S_1 = a_1; S_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \Rightarrow 2S_2 = (a_1 + a_2)\,; S_3 = \frac{2}{3}S_2 + \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \Rightarrow 3S_3 = (a_1 + a_2 + a_3)$, et donc
   $$kS_k = (a_1 + \cdots a_k)\,; k \geq 1$$
   En utilisant cette relation, on a
   (a) $M_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = M_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n}a_n = \frac{n-1}{n}S_{n-1} + \frac{1}{n}a_n = S_n$, et
   (b) $S_n = \frac{n-1}{n}S_{n-1} + \frac{1}{n}a_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n}a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = M_n$

   ce qui établit l'équivalence.

2. Supposons que nous travaillons avec un ordinateur qui utilise le standard IEEE 744, double précision. En établissant les algorithmes respectifs pour chacun de deux calculs, M_n et S_n, indiquer lequel de ces deux calculs est le plus précis. Justifier brièvement votre réponse.
   SOL.- Algorithme pour M_n.

   M$_n \leftarrow a_1$
   for $k \leftarrow 2$ **to** n
   　　do
   　　　M$_n \leftarrow M_n + a_k$
   M$_n \leftarrow M_n/n$

   Algorithme pour S_n

   S$_n \leftarrow a_1$
   for $k \leftarrow 2$ **to** n
   　　do
   　　　S$_n \leftarrow (k-1) \times S_n/k + a_k/n$

Le premier algorithme effectue $n-1$ additions des nombres entiers, qui se font sans erreur de calcul, tandis que le second algorithme effectue $2\,(n-1)$ divisions et $n-1$ additions des nombres réels, chaque addition ayant une erreur de calcul. Par conséquent le premier algorithme est plus précis.

Exercice 2
Soit la formule
$$y=\frac{2}{(1+x)\,(1-x)}$$
Écrire l'algorithme qui, sans modifier ou simplifier la formule, effectue le calcul et évaluer la borne supérieure de l'erreur de calcul propagée par l'utilisation de cet algorithme.

SOL.- Les étapes de l'algorithme sont

1. $s \leftarrow 1+x$
2. $r \leftarrow 1-x$
3. $w \leftarrow s \times r$
4. $y \leftarrow 2/w$

Donc $r=4$.
On a

1. $x^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\x\\2\end{bmatrix}\longrightarrow \phi^{(1)}\left(x^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}1+x\\1\\x\\2\end{bmatrix}=x^{(1)}$
2. $x^{(1)}=\begin{bmatrix}s\\1\\x\\2\end{bmatrix}\longrightarrow \phi^{(2)}\left(x^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}s\\1-x\\2\end{bmatrix}=x^{(2)}$
3. $x^{(2)}=\begin{bmatrix}s\\r\\2\end{bmatrix}\longrightarrow \phi^{(3)}\left(x^{(2)}\right)=\begin{bmatrix}s\times r\\2\end{bmatrix}=x^{(3)}$
4. $x^{(3)}=\begin{bmatrix}w\\2\end{bmatrix}\longrightarrow \phi^{(4)}\left(x^{(3)}\right)=[2/w]=x^{(4)}=y$

et donc $\phi=\phi^{(4)}\circ\phi^{(3)}\circ\phi^{(2)}\circ\phi^{(1)}$.

Calcul de $\psi^{(k)}$ pour $k=1,\ldots,r-1=3$. On a
$\psi^{(1)}=\phi^{(4)}\circ\phi^{(3)}\circ\phi^{(2)}\left(x^{(1)}\right)=\frac{2}{s\cdot(1-x)}$
$\psi^{(2)}=\phi^{(4)}\circ\phi^{(3)}\left(x^{(2)}\right)=\frac{2}{s\cdot r}$
$\psi^{(3)}=\phi^{(4)}\left(x^{(3)}\right)=\frac{2}{w}$
On calcule les jacobiens :
$J\left[\phi\left(x\right)\right]=-\frac{2x}{(1-x^2)^2}$
$J\left[\psi^{(1)}\left(x^{(1)}\right)\right]=\left[\frac{-2}{s^2(1-x)},0,\frac{2}{s(1-x)^2},0\right]$
$J\left[\psi^{(2)}\left(x^{(2)}\right)\right]=\left[\frac{-2}{s^2r},\frac{-2}{sr^2},0\right]$
$J\left[\psi^{(3)}\left(x^{(3)}\right)\right]=\left[\frac{-2}{w^2},0\right]$
On a $\Delta x=[\Delta x]$
Calcul des matrices $\mathbf{H}_i$
$$\mathbf{H}_1=\begin{bmatrix}\eta_1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{H}_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\eta_2&0\\0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{H}_3=\begin{bmatrix}\eta_3&0\\0&0\end{bmatrix},\mathbf{H}_4=[\eta_4]$$

Application de la formule (1.8.19) du poly :

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= J\left[\phi\left(x\right)\right]\Delta x + \sum_{k=1}^{r-1} J\left[\psi^{(k)}\left(x^{(k)}\right)\right]\mathbf{H}_k x^{(3)} + \mathbf{H}_r y \\
&= \tfrac{2x}{(1-x^2)^2}\Delta x + \left[\tfrac{-2}{(1+x)^2(1-x)}, 0, \tfrac{2}{(1+x)(1-x)^2}, 0\right]\begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+x \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} + \\
& \left[\tfrac{-2}{(1+x)^2(1-r)}, \tfrac{-2}{(1+x)(1-x)^2}, 0\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+x \\ 1-x \\ 2 \end{bmatrix} + \\
& \left[\tfrac{-2}{(1+x)^2(1-x)^2}, 0\right]\begin{bmatrix} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1+x)\times(1-x) \\ 2 \end{bmatrix} + [\eta_4]\tfrac{2}{(1+x)(1-x)} \\
&= \tfrac{2x}{(1-x^2)^2}\Delta - \tfrac{2}{(1-x^2)}\left(\eta_1+\eta_2+\eta_3-\eta_4\right)
\end{aligned}
$$

d'où on obtient

$$
\mid \Delta y \mid \leq \frac{\mid 2x \mid}{\left(1-x^2\right)^2} \mid \Delta x \mid + \frac{8}{\mid 1-x^2 \mid} eps
$$

Exercice 3

On veut résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont 1 et 2001, les vecteurs propres : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement. On a donc la formule de diagonalisation

$$
\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

1. Déterminer l'inverse de $\mathbf{P}$.
   SOL.- $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminer $\|\mathbf{A}\|_2$.
   SOL.- D'après les propriétés de la norme 2 on a

   $$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$$

   De la symétrie de $\mathbf{A}$, on déduit

   $$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^2)}$$

   Or les valeurs propres de $\mathbf{A}^2$ sont les carrés des valeurs propres de $\mathbf{A}$ donc

   $$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) = 2001$$

3. On considère la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ de $\mathbf{A}$.

(a) Montrer, sans calculer $\mathbf{A}^{-1}$ que $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = 1$.

Indication.- Utiliser le fait que les valeurs propres de l'inverse d'une matrice sont les inverses des valeurs propres de la matrice.

SOL.- La matrice $\mathbf{A}$ est symétrique donc son inverse l'est aussi. On déduit donc comme précédemment que

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{A}^{-1})} = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1})} = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^{-1})^2} = \rho(\mathbf{A}^{-1})$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de $\mathbf{A}$ donc la plus grande valeur propre de $\mathbf{A}^{-1}$ est l'inverse de la plus petite valeur propre de $\mathbf{A}$, d'où

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = 1$$

(b) Vérifier, en utilisant la diagonalisation de la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ que votre calcul est exact.

SOL.- On peut le vérifier : de $\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}$ on déduit $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P\Lambda}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 1/2001\begin{pmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{pmatrix}$ sont encore 1 et 2001.

4. Expliciter les solutions du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en utilisant la diagonalisation ci-dessus.
SOL.-

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{\Lambda P}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ 2001(x_1 + x_2) = 2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ 2001x_1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 1/2001
\end{aligned}$$

5. On effectue une erreur sur le second membre b et on résout à la place de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$, avec $\mathbf{\Delta b} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On trouve $\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 4.852.10^{-17} \end{pmatrix}$.

Indications : On donne $1/2001 = 0.0004998$, $\sqrt{2} \simeq 1.4$,$\sqrt{2}/2001 \simeq 0.0007068$et $2001/\sqrt{2} \simeq 1414.9207$.

(a) Déterminer l'erreur $\mathbf{\Delta x}$ commise sur $\mathbf{x}$.

SOL.- $\mathbf{\Delta x} = \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 4.852.10^{-17} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.0004998 \\ 0.0004998 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0005002 \\ -0.0004998 \end{pmatrix}$

(b) Estimer $\|\mathbf{\Delta x}\|_2$.

SOL.- $\mathbf{\Delta x} \simeq 5.10^{-4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\|\mathbf{\Delta x}\|_2 \simeq \sqrt{2}.5.10^{-4} \simeq 7.10^{-4}$

(c) L'erreur relative $\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$ aurait-elle pu être plus importante pour une autre valeur de $\mathbf{\Delta b}$?

SOL.- On sait que l'on a la majoration

$$\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq cond(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{\Delta b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$$

Ici on a $cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 . \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = 2001$. D'autre part $\|\mathbf{\Delta b}\|_2 = \sqrt{1 + 10^{-6}} \simeq 1$ et $\|\mathbf{b}\|_2 = \sqrt{2}$ donc la borne supérieure est environ $2001/\sqrt{2} \simeq 1415$.
Par ailleurs

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{2}/2001 \simeq 7.10^{-4}$$

Donc

$$\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \simeq 1$$

(On a en fait une valeur de 1.0005001). La réponse est donc : oui, l'erreur relative aurait pu être plus importante.

6. Pour résoudre le système on peut aussi appliquer la méthode itérative simple de Jacobi. Prenons comme vecteur initial $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^{\top}$.
Calculer, en utilisant la formule du calcul itératif de Jacobi, le vecteur $\mathbf{x}(1)$.
SOL.- En appliquant l'itération de Jacobi
$\mathbf{x}(k) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$,
on trouve
$\mathbf{x}_4(1) = \begin{pmatrix} 0.999001 \\ 0.999001 \end{pmatrix}$.