EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE I

22 janvier 2009 – **DURÉE 2h00**
La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.
L'utilisation des 2 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM : ....

NOTE

DÉTAIL

Exercice 1.

	1	**2**	**3**	**4**
Exercice 2.				

	1	**2**	**3a**	**3b**
Exercice 3.				

NOM : ....

Exercice 1

Considéérons une suite de nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ avec $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i$. La moyenne arithmétique est donnée par la formule

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Considérons aussi le calcul itératif

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_k &= \frac{k-1}{k}S_{k-1} + \frac{1}{k}a_k; k \geq 2 \end{aligned}$$

1. Montrer que les deux formules de calcul M_n et S_n sont équivalentes.

   SOL.- On a $S_1 = a_1; S_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \Rightarrow 2S_2 = (a_1 + a_2); S_3 = \frac{2}{3}S_2 + \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \Rightarrow 3S_3 = (a_1 + a_2 + a_3)$, et donc

   $$kS_k = (a_1 + \cdots a_k); k \geq 1$$

   En utilisant cette relation, on a

   (a) $M_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = M_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n}a_n = \frac{n-1}{n}S_{n-1} + \frac{1}{n}a_n = S_n$, et

   (b) $S_n = \frac{n-1}{n}S_{n-1} + \frac{1}{n}a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n}a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = M_n$

   ce qui établit l'équivalence.

NOM : ....

2. Supposons que nous travaillons avec un ordinateur qui utilise le standard IEEE 744, double précision. En établissant les algorithmes respectifs pour chacun de deux calculs, M_n et S_n, indiquer lequel de ces deux calculs est le plus précis. Justifier brièvement votre réponse.
   SOL.- Algorithme pour M_n.
   M$_{n}=$a$_{1}$
   Pour k = 2 \`{a} n faire
   D\'{e}but
   M$_{n}$ = M$_{n}$ + a$_{k}$
   Fin
   M$_{n}$ = M$_{n}$/n.
   Algorithme pour S_n
   S$_{n}$ = a$_{1}$
   Pour k = 2 \`{a} n faire
   S$_{n}$ = (k-1)*S$_{k-1}$/k + a$_{k}$/n
   Fin
   Le premier algorithme effectue $n-1$ additions des nombres entiers, qui se font sans erreur de calcul, tandis que le second algorithme effectue $2\,(n-1)$ divisions et $n-1$ additions des nombres réels, chaque addition ayant une erreur de calcul. Par conséquent le premier algorithme est plus précis.

NOM : ....

Exercice 2
Soit la formule

$$y = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

Écrire l'algorithme qui, sans modifier ou simplifier la formule, effectue le calul et évaluer la borne supérieure de l'erreur de calcul propagée par l'utilisation de cet algorithme.

SOL.- Les étapes de l'algorithme sont

1. $s \leftarrow 1+x$
2. $r \leftarrow 1-x$
3. $w \leftarrow s \times r$
4. $y \leftarrow 2/w$

Donc $r = 4$.
On a

1. $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(1)}\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 1+x \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(1)}$
2. $x^{(1)} = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(2)}\left(x^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} s \\ 1-x \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(2)}$
3. $x^{(2)} = \begin{bmatrix} s \\ r \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(3)}\left(x^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} s \times r \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(3)}$
4. $x^{(3)} = \begin{bmatrix} w \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(4)}\left(x^{(3)}\right) = [2/w] = x^{(4)} = y$

   et donc $\phi = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}$.

Calcul de $\psi^{(k)}$ pour $k = 1, \ldots, r-1 = 3$. On a
$\psi^{(1)} = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)}\left(x^{(1)}\right) = \frac{2}{s\cdot(1-x)}$
$\psi^{(2)} = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)}\left(x^{(2)}\right) = \frac{2}{s\cdot r}$
$\psi^{(3)} = \phi^{(4)}\left(x^{(3)}\right) = \frac{2}{w}$
On calcule les jacobiens :
$J\left[\phi(x)\right] = -\frac{2x}{(1-x^2)^2}$
$J\left[\psi^{(1)}\left(x^{(1)}\right)\right] = \left[\frac{-2}{s^2(1-x)}, 0, \frac{2}{s(1-x)^2}, 0\right]$
$J\left[\psi^{(2)}\left(x^{(2)}\right)\right] = \left[\frac{-2}{s^2 r}, \frac{-2}{s r^2}, 0\right]$
$J\left[\psi^{(3)}\left(x^{(3)}\right)\right] = \left[\frac{-2}{w^2}, 0\right]$
On a $\Delta x = [\Delta x]$
Calcul des matrices $\mathbf{H}_i$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_4 = [\eta_4]$$

Application de la formule (1.8.19) du poly :

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= J\left[\phi\left(x\right)\right]\Delta x+\sum_{k=1}^{r-1}J\left[\psi^{(k)}\left(x^{(k)}\right)\right]\mathbf{H}_k x^{(3)}+\mathbf{H}_r y \\
&= \tfrac{2x}{(1-x^2)^2}\Delta x+\left[\tfrac{-2}{(1+x)^2(1-x)},0,\tfrac{2}{(1+x)(1-x)^2},0\right]\begin{bmatrix}\eta_1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+x\\1\\x\\2\end{bmatrix}+ \\
&\quad \left[\tfrac{-2}{(1+x)^2(1-r)},\tfrac{-2}{(1+x)(1-x)^2},0\right]\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\eta_2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+x\\1-x\\2\end{bmatrix}+ \\
&\quad \left[\tfrac{-2}{(1+x)^2(1-x)^2},0\right]\begin{bmatrix}\eta_3&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1+x)\times(1-x)\\2\end{bmatrix}+\left[\eta_4\right]\tfrac{2}{(1+x)(1-x)} \\
&= \tfrac{2x}{(1-x^2)^2}\Delta-\tfrac{2}{(1-x^2)}\left(\eta_1+\eta_2+\eta_3-\eta_4\right)
\end{aligned}
$$

d'où on obtient

$$
\mid \Delta y \mid \leq \frac{\mid 2x \mid}{\left(1-x^2\right)^2}\mid \Delta x \mid + \frac{8}{\mid 1-x^2 \mid}eps
$$

NOM : ....

Exercice 3
Soient $\mathbf{E}_4$ et $\mathbf{U}_4$ des matrices carrées d'ordre 4 et $f_4 \in \mathbb{R}^4$ définis par :

$$\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{I}_4$ désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^4$.

1. Vérifier que $\mathbf{A}_4 = (\mathbf{2I}_4 - \mathbf{E}_4).\mathbf{U}_4$.

NOM : ....

2. En déduire $\det(\mathbf{A}_4)$

NOM : ....

3. Calculer $\mathbf{E}_4^2, \mathbf{E}_4^3, \ldots, \mathbf{E}_4^n$.

NOM : ....

4. Montrer que $\mathbf{U}_4^{-1} = \mathbf{I}_4 - \mathbf{E}_4^\top$.

NOM : ....

5. Montrer que

$$\left(\mathbf{I}_4 - \frac{\mathbf{E}_4}{2}\right)^{-1} = I + \frac{\mathbf{E}_4}{2} + \frac{\mathbf{E}_4^2}{4} + \frac{\mathbf{E}_4^3}{8}$$

Indication : on pourra utiliser le fait que pour toute matrice $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$ on peut écrire :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^k$$

NOM : ....

6. En déduire l'inverse de $\mathbf{A}_4$: $\mathbf{A}_4^{-1}$

NOM : ....

7. Montrer que

$$\left\|\mathbf{A}_4^{-1}\right\|_\infty = 1 - \frac{1}{2^3}$$

NOM : ....

8. Déterminer $cond_\infty(\mathbf{A}_4)$

NOM : ....

9. On peut généraliser ce résultat pour des matrices $\mathbf{A}_n$ de taille n, construites sur le même principe, à savoir :

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas on montre que

$$\left\|\mathbf{A}_n^{-1}\right\|_\infty = 1 - \frac{1}{2^n}$$

NOM : ....

10. Montrer que le conditionnement de $\mathbf{A}_n$ vérifie alors

$$cond_\infty(\mathbf{A}_n)$$

NOM : ....

11. On considère le système linéaire
$$\mathbf{A}_n \mathbf{x}_n = \mathbf{f}_n$$
et on suppose qu'une erreur $\delta \mathbf{f}_n = (0.1; 0.1; ...; 0.1)$ est commise sur le second membre.
Jusqu'à quelle dimension d'espace n peut-on assurer que l'erreur relative sur la solution sera inférieure à 10%, 20%, 30% ?

NOM : ....

12. Considérons de nouveau la matrice $\mathbf{A}_4$ et le vecteur $\mathbf{f}_4$. Nous formons le système d'équations linéaires

$$\mathbf{A}_4\mathbf{x}_4 = \mathbf{f}_4$$

Pour résoudre ce système, nous appliquerons la méthode itérative simple de Jacobi. Prenons comme vecteur initial $\mathbf{x}_4(0) = (1,1,1,1)^\top$.

Donner, en utilisant la formule du calcul itératif de Jacobi, le vecteur $\mathbf{x}_4(1)$.

SOL.-

On a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L}+\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'itération de Jacobi

$\mathbf{x}_4(k) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}_4(k-1) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{f}_4,$

on trouve

$$\mathbf{x}_4(1) = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$