1.- Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par la relation $f(x,y)=x\sin y$.

1. Calculer approximativement la valeur de $\delta f=f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y)$.
2. Calculer l'erreur relative $\frac{\delta f}{f}$.
3. Donner la valeur de $\frac{\delta f}{f}$ si $y\simeq\pi/2$.
4. Calculer le nombre-condition pour le calcul de f au point $x=1,y=\pi/2$.

Sol.-

$$\frac{df}{f}=\frac{\sin y dx}{x\sin y}+\frac{x\cos y dy}{x\sin y}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{\mathrm{tg} y}$$

Donc $\frac{df}{f}\simeq\frac{\delta x}{x}$. Nombre-condition $=1$.

2.- Soit la matrice $\mathbf{A}=(a_{ij}),\ i,j=1,\ldots,n$ avec $a_{ij}\in\mathbb{R}$. On définit la quantité

$$\|\mathbf{A}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

1. Montrer que $\|\mathbf{A}\|$ est une norme sous-multiplicative.
2. Montrer que $\|\mathbf{A}\|>1$ pour $n>1$.
3. Montrer que $\|\mathbf{A}\|^2=\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\right)$, où par $\mathrm{tr}(\mathbf{X})$ on note la trace de la matrice $\mathbf{X}$.

Sol.- 1. Montrons que la norme est sous-multiplicative (cf. poly p.50). Soit $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\|\mathbf{C}\|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})^2\leq$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^2\right)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(b_{jk})^2=\|\mathbf{A}\|^2\|\mathbf{B}\|^2$.

2.- $\|\mathbf{I}\|=\sqrt{n}>1$ pour $n>1$.

3.- $\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)=\|\mathbf{A}\|^2$

3.- Soit le système d'équations linéaires :2

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&6&-2\\1&-1&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\\8\end{bmatrix}$$

Donner la formule itérative de Gauss-Seidel et calculer la solution du système après deux itérations.
On prendra comme vecteur initial $\mathbf{x}(0)=[1,\quad -1,\quad 0]^\top$.

Sol.- Nous avons pour la solution (cf. poly p.62)

$$\mathbf{x}(k+1) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\right)\mathbf{x}(k) - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}\ ;\ \mathbf{k} \geq \mathbf{0}$$

ce qui donne $x_1(k+1) = (-1 + x_2(k))/2, \quad x_2(k+1) = (5 - x_1(k+1) + 2x_3(k))/6, \quad x_3(k+1) = (8 - x_1(k+1) + x_2(k+1))/8$, et par conséquent : $(1) = [-1, \quad 1, \quad 5/4]^\top, \quad \mathbf{x}(2) = [0, \quad 5/4, \quad 37/32]^\top$.

5.- Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle on connaît ses valeurs à quatre points : $(0,2), (1/2,1), (1,1/2), (3/2,0)$. Supposons que cette fonction puisse être approximée par la fonction

$$g(x) = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \cos(\pi x) + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

On cherche à calculer les coefficients c_1, c_2 et c_3.

1. Indiquer la méthode qu'il faut utiliser pour ce calcul.
2. Écrire la relation qui permet d'obtenir la solution.
3. Appliquer la formule de la solution à la relation précédente. (N.B. Il n'est pas demander de calculer la solution du problème mais seulement de le modéliser.)

Sol.- On utilisqe la méthode des moindres carrés. On a

$$\mathbf{Xc} = \mathbf{b} \text{ où } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\widehat{\mathbf{c}} = \left(\mathbf{X}^\top\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\top\mathbf{b}$.

6.- Considérons l'intégrale

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx\ , \ \text{ avec } 0 \leq x < 1$$

1. Évaluer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole la fonction $\frac{1}{1-x}$ aux points 0, 1/3 et 2/3.
2. Calculer les coefficients a_0, a_1 et a_2 tels que pour chaque polynôme p de degré ≤ 2, on ait

$$\int_0^2 p(x)\,dx = a_0 p(0) + a_1 p(1) + a_2 p(2)$$

Sol.- Le polynôme de Lagrange est d'ordre 2. On trouve : $L(x) = \frac{9}{2}x^2 + 1$.

On considère les trois polynômes $p(x) = 1$, $p(x) = x$ et $p(x) = x^2$ de degré ≤ 2. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^2 1dx &= 2 = a_0 + a_1 + a_2 \\
\int_0^2 xdx &= 2 = a_1 + 2a_2 \\
\int_0^2 x^2dx &= \frac{8}{3} = a_1 + 4a_2
\end{aligned}$$

d'où $a_0 = a_2 = \frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{4}{3}$.