EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE I

7 février 2008 – **DURÉE 2h00**

La consultation des documents et l'échange des documents et des calculatrices est interdit.
L'utilisation des 2 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM : ....

NOTE

DÉTAIL

Exercice 1.

	1	2	3	4
Exercice 2.				

	1	2	3a	3b
Exercice 3.				

	1	2	3
Exercice 4.			

NOM : ....

Exercice 1 –

Pour résoudre l'équation $ax^2+2bx+c=0$ on doit calculer $\sqrt{b^2-ac}$. Supposons que nous utilisons pour le codage des nombres en machine la norme IEEE-754 et le calcul de $m(x)$, étant donné la valeur x, se fait par troncature. Est-il possible que la vraie valeur de b^2-ac soit non négative et la valeur calculée négative ? Justifier votre réponse.

SOL.- Non. Si $b^2-ac \geq 0$,a lors $m\left(b^2\right)-m(ac)$ car la troncature est une opération monotone. Donc $m\left(m\left(b^2\right)-m(ac)\right)=\left(m\left(b^2\right)-m(ac)\right)(1+\eta)\geq 0$ avec $|\eta|\leq$ eps.

Exercice 2

Nous avons un ordinateur qui utilise comme base de numérotation β et dispose de p places pour la mantisse. On sait que si un nombre réel $x>0$ peut être stocké dans cet ordinateur, alors il peut être représenté sous la forme $x=w\times\beta^n$, avec w nombre entier tel que $\beta^{p-1}\leq w<\beta^p$. Par exemple le réel 123.456 peut être représenté par 123456×10^{-3} et il peut être stocké dans un ordinateur avec $\beta=2$ et $p=18$, car $2^{17-1}=65536<13456<2^{17}=131072$. Un tel nombre on l'appellera nombre *digits p.racine* β.

Par la suite on notera $\mathrm{ulp}(x)=\beta^n$ (ulp = Unit in the Last Place de x).

1. Donner la propriété commune de tous les nombres *digits p.racine* β en fonction de ulp.
   SOL.- Si un réel a est un nombre *digits p.racine* β alors il est un multiple de $\mathrm{ulp}(a)$.
2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple pour $\beta=2$ que tout réel n'est pas un nombre *digits p.racine* β pour p fini.
   SOL.- Prenons $a=\frac{1}{3}=0.333...$
3. Considérons maintenant deux réels a et b tels que $0<b<a$ et qui sont des nombres *digits p.racine* β. Montrer que a est un multiple de $\mathrm{ulp}(b)$.
   SOL.- $a=w\times\mathrm{ulp}(a)>b=w'\times\mathrm{ulp}(b)$ Donc $\mathrm{ulp}(a)\geq\mathrm{ulp}(b)$. On a $\mathrm{ulp}(a)=\beta^k$ et $\mathrm{ulp}(b)=\beta^l$ avec $k\geq l$. Donc $\mathrm{ulp}(a)=\beta^l\beta^{k-l}$ et, par conséquent, a est un multiple de $\mathrm{ulp}(b)$.
4. On continue avec les données de la question précédente. Démontrer que si $\frac{a}{b}\leq 2$, alors $a-b$ est aussi un nombre *digits p.racine* β.
   SOL.- Il faut montrer que $a-b$ est un multiple de $\mathrm{ulp}(a-b)$. On a $a\leq 2b\Rightarrow a-b\leq b$. Par conséquent si $a-b=w''\times\beta^m$, on a $k\geq l\geq m$. Alors $b-a=w\times\beta^k-w'\times\beta^l=w\times\beta^m\beta^{k-m}-w'\times\beta^m\beta^{l-m}=\left(w\times\beta^{k-m}-w'\times\beta^{l-m}\right)\beta^m$, donc $b-a$ est un multiple de $\mathrm{ulp}(a-b)$.

Exercice 3

On s'intéresse à la série

$$S=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2+i}$$

dont la somme partielle d'ordre n est notée S_n :

$$S_n=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+i}$$

1. En décomposant la fraction en éléments simples, montrer que
   $$S_n=2-\frac{1}{n+1}$$
   SOL : $\frac{1}{i^2+i}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$ donc $\sum_{i=1}^n\frac{1}{i^2+i}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$ d'où le résultat
2. En déduire la valeur de S.
   SOL : le calcul de la limite donne
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$
   donc
   $$\lim_{n\to\infty}S_n=2$$

3. On peut calculer la valeur de la somme partielle S_n de deux façons. Soit en sommant dans l'ordre croissant des indices, dans ce cas on évalue :

$$S_{1,n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \frac{1}{n^2+n}$$

soit dans l'ordre décroissant des indices, dans ce cas on évalue

$$S_{2,n} = \frac{1}{n^2+n} + \dots + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1$$

Les résultats calculés avec un programme en langage C en simple précision sont résumés dans le tableau ci-dessous pour différentes valeurs de n.

n	$S_{1,n}$	$S_{2,n}$	$S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$
99	$1,989999890$	$1,990000010$	$1,99$
999	$1,999001026$	$1,999000072$	$1,999$
9999	$1,999791980$	$1,999899983$	$1,9999$

(a) Quel est le calcul de somme partielle le plus précis ?
SOL : le calcul de $S_{2,n}$ se rapporche davantage de la valeur exacte $1,9999$ donc il est plus précis que celui de $S_{1,n}$.

(b) Donnez une explication et une justification théorique de ce résultat.
SOL : Lorsqu'on effectue les calculs dans $S_{1,n}$ on obtient des sommes de plus en plus grandes devant le terme qui leur est ajouté $\frac{1}{i^2+i}$. Celui-ci vient à être négligé puisqu'on ajoute un grand nombre avec un petit. Par contre lorsqu'on procède au calcul avec $S_{2,n}$ on ajoute progressivement des petits nombres, qui se cumulent progressivement de façon à ce que le phénomène précédent ne se produise pas.
On peut vérifier sur le cas de l'addition de trois nombres a, b et c tels que $a > b > c$, que faire $(a+b)+c$ n'est pas équivalent à faire $a+(b+c)$.

Exercice 4

Considérons une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si $\mathbf{A}$ est regulière, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\|\mathbf{Ax}\| \geq r\,\|\mathbf{x}\|$$

et vice-versa.
Vérifier aussi que $r = \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$.
SOL.- $\mathbf{A}$ est regulière $\Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = \left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}\right\| \leq \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{Ax}\| \Rightarrow \|\mathbf{Ax}\| \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}\|\mathbf{x}\| = r\,\|\mathbf{x}\|$.
On a $\|\mathbf{Ax}\| \geq r\,\|\mathbf{x}\|$. Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{0}$. Nous allons démontrer que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. On a $0 = \|\mathbf{Ax}_0\| \geq r\,\|\mathbf{x}_0\|$. Comme $r > 0$, il s'ensuit que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

2. Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ est regulière. Alors il existe un réel $\delta > 0$, tel que pour toute matrice $\mathbf{E}$ vérifiant $\|\mathbf{E}\| \leq \delta$, on a que la matrice $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ est régulière.
Exprimer δ en fonction de $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$.
Indication : Utiliser le résultat précédent.
SOL.- $\mathbf{A}$ est regulière $\Rightarrow$ il existe un réel $r > 0$ tel que $\|\mathbf{Ax}\| \geq r\,\|\mathbf{x}\|$. Par ailleurs, nous avons $\|(\mathbf{A}+\mathbf{E})\,\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{Ax}\| - \|\mathbf{Ex}\| \geq \|\mathbf{Ax}\| - \|\mathbf{E}\|\,\|\mathbf{x}\| \geq (r - \|\mathbf{E}\|)\,\|\mathbf{x}\| > 0$ si on prend un $\delta < r = \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$.

3. Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ est regulière. Montrer que si la matrice $\mathbf{B}$ est singulière, alors

$$\frac{1}{cond\,(\mathbf{A})} \leq \frac{\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Indication : Utiliser le résultat précédent.
SOL.- À la question précédete, ous avos montrer que si $\|\mathbf{E}\| \leq \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$, alors la matrice $(\mathbf{A}+\mathbf{E})$ est régulière. Inversement si $(\mathbf{A}+\mathbf{E})$ est sigulière, alors $\|\mathbf{E}\| \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$
Posons $\mathbf{E} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Donc si $\mathbf{B} = \mathbf{A}+\mathbf{E}$ est singulière, on a $\frac{\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|} \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|} = \frac{1}{cond(\mathbf{A})}$