1.- Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la relation $f(x, y) = x \sin y$.

1. Calculer approximativement la valeur de $\delta f = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)$.
2. Calculer l'erreur relative $\frac{\delta f}{f}$.
3. Donner la valeur de $\frac{\delta f}{f}$ si $y \simeq \pi/2$.
4. Calculer le nombre-condition pour le calcul de f au point $x = 1, y = \pi/2$.

Sol.-

$$\frac{df}{f} = \frac{\sin y dx}{x \sin y} + \frac{x \cos y dy}{x \sin y} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{\mathrm{tg} y}$$

Donc $\frac{df}{f} \simeq \frac{\delta x}{x}$. Nombre-condition = 1.

2.- Soit la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, n$ avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$. On définit la quantité

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

1. Montrer que $\|\mathbf{A}\|$ est une norme sous-multiplicative.
2. Montrer que $\|\mathbf{A}\| > 1$ pour $n > 1$.
3. Montrer que $\|\mathbf{A}\|^2 = \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\right)$, où par $\mathrm{tr}(\mathbf{X})$ on note la trace de la matrice $\mathbf{X}$.

Sol.- 1. Montrons que la norme est sous-multiplicative (cf. poly p.50). Soit $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\|\mathbf{C}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{ij} b_{jk})^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^2\right) \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (b_{jk})^2 = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2$.

2.- $\|\mathbf{I}\| = \sqrt{n} > 1$ pour $n > 1$.

3.- $\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) = \|\mathbf{A}\|^2$

3.- Soit le système d'équations linéaires :2

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Donner la formule itérative de Gauss-Seidel et calculer la solution du système après deux itérations.
On prendra comme vecteur initial $\mathbf{x}(0) = [1, \quad -1, \quad 0]^\top$.

Sol.- Nous avons pour la solution (cf. poly p.62)

$$\mathbf{x}(k+1) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\right)\mathbf{x}(k) - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}\ ;\ \mathbf{k} \geq \mathbf{0}$$

ce qui donne $x_1(k+1) = (-1 + x_2(k))/2$, $x_2(k+1) = (5 - x_1(k+1) + 2x_3(k))/6$, $x_3(k+1) = (8 - x_1(k+1) + x_2(k+1))/8$, et par conséquent : $(1) = [-1, \quad 1, \quad 5/4]^\top$, $\mathbf{x}(2) = [0, \quad 5/4, \quad 37/32]^\top$.

5.- Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle on connaît ses valeurs à quatre points : $(0,2), (1/2,1), (1,1/2), (3/2,0)$. Supposons que cette fonction puisse être approximée par la fonction

$$g(x) = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \cos(\pi x) + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

On cherche à calculer les coefficients c_1, c_2 et c_3.

1. Indiquer la méthode qu'il faut utiliser pour ce calcul.
2. Écrire la relation qui permet d'obtenir la solution.
3. Appliquer la formule de la solution à la relation précédente. (N.B. Il n'est pas demander de calculer la solution du problème mais seulement de le modéliser.)

Sol.- On utilisqe la méthode des moindres carrés. On a

$$\mathbf{Xc} = \mathbf{b} \text{ où } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\widehat{\mathbf{c}} = \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{b}$.

6.- Considérons l'intégrale

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx \ , \text{ avec } 0 \leq x < 1$$

1. Évaluer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole la fonction $\frac{1}{1-x}$ aux points 0, 1/3 et 2/3.
2. Calculer les coefficients a_0, a_1 et a_2 tels que pour chaque polynôme p de degré ≤ 2, on ait

$$\int_0^2 p(x)\,dx = a_0 p(0) + a_1 p(1) + a_2 p(2)$$

Sol.- Le polynôme de Lagrange est d'ordre 2. On trouve : $L(x) = \frac{9}{2}x^2 + 1$.

On considère les trois polynômes $p(x) = 1$, $p(x) = x$ et $p(x) = x^2$ de degré ≤ 2. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^2 1dx &= 2 = a_0 + a_1 + a_2 \\
\int_0^2 xdx &= 2 = a_1 + 2a_2 \\
\int_0^2 x^2dx &= \frac{8}{3} = a_1 + 4a_2
\end{aligned}$$

d'où $a_0 = a_2 = \frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{4}{3}$.