EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

1er juin 2005 – **DURÉE 3h00**
La consultation de documents, l'échange de documents et l'usage de calculatrice sont interdits.
Seul l'utilisation des 2 feuilles manuscrites recto-verso format A4 est autorisée.

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille.**

NOM : ....

NOTE

DÉTAIL

	1	**2**	**3**					
Exercice 1 - 6 points								

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
Exercice 2 - 6 points						

	1	
Exercice 3 - 2 points		

	1	**2a**	**2bi**	**2bii**	**2biii**	**2c**	**3**	
Exercice 4 - 6 points								

NOM : ....

Exercice 1 : Erreur - 6 points

Soit $f(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables réelles x_1, x_2 et x_3. Notons $\mathbf{x}$ le vecteur de ces trois composantes. Supposons que cette fonction est évaluée au point $\mathbf{x}$ et au point perturbé $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$. On notera par la suite la fonction évaluée au point perturbé $f + \delta f = f\,(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})$.

1. **2 points.** Supposons que f est linéaire, *i.e.* qu'elle peut s'écrire $f\,(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$.
   Sous quelles conditions concernant $\delta\mathbf{x}$ nous pouvons avoir $f + \delta f = f$?

   Solution.- On a $f\,(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$. Alors $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top$. En appliquant Taylor et en éliminant les termes non linéaires, on a $f\,(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = f\,(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\delta\mathbf{x} = f\,(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^\top\delta\mathbf{x}$. Pour avoir $f + \delta f = f$, il faut que $\delta\mathbf{x}$ et $\mathbf{c}$ soient orthogonaux.

2. **2 points.** Supposons maintenant que f est non linéaire.
   Sous quelles conditions concernant $\delta\mathbf{x}$ nous pouvons avoir $f + \delta f = f$?

   Solution.- D'après la solution du point précédent, il faut que $\delta\mathbf{x}$ et $f'(\mathbf{x})$ soient orthogonaux.

3. **2 points.** Considérons le cas particulier $f(a, b, c) = (ab + cb)/(abc)$. Donner les conditions correspondantes pour $\delta a, \delta b$ et δc pour que $f + \delta f = f$.

   Solution.- Nous avons $f(a, b, c) = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$. Donc f est indépendante de b et par conséquent δb peut prendre n'importe quelle valeur. On a $f'(\mathbf{x}) = -\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{c^2}$, donc $f'(\mathbf{x})\delta\mathbf{x} = -\dfrac{\delta a}{a^2} - \dfrac{\delta c}{c^2}$. Nous avons $f + \delta f = f$ si $\dfrac{\delta a}{\delta c} = -\dfrac{a^2}{c^2}$.

NOM : ....

Exercice 2 : Algèbre linéaire - 6 points

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels et F le sous-espace vectoriel des applications affines.

1. **1 point.** Montrer que l'application

$$\boxed{\langle .,. \rangle : (P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle = P(0)\,Q(0) + P(1)\,Q(1) + P(2)\,Q(2)}$$

définit un produit scalaire sur E.

Solution.-

2. **1 point.** Transformer la base canonique $\{1,x\}$ de F en une base orthonormée.

Solution.-

3. **1 point.** Déterminer $p(R)$ où p est le projecteur orthogonal de E sur F et R est le polynôme $R(x) = 3x^2 - 5x$ puis l'angle entre les vecteurs R et $p(R)$.

Solution.-

4. **1 point.** Déterminer la matrice de p dans la base $\{1, x, x^2\}$. Retrouver le calcul de la question précédente.

Solution.-

5. **2 points.** On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Évaluer la quantité

$$\boxed{\min_{S \in F} \|R - S\|.}$$

Solution.-

NOM : ....

Exercice 3 : Méthode itérative de Jacobi - 2 points

Considérons le système d'equations linéaires

$$\boxed{\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

Écrire la relation itérative de la méthode de Jacobi. Appliquer cette méthode une seule fois et donner $\mathbf{x}(1)$, où on a noté $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top$. On initialise $\mathbf{x}(0) = [0, 0, 0]^\top$.

Solution.- Méthode de Jacobi : Si le système s'écrit

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

alors la relation itérative de Jacobi est

$$\mathbf{x}(k+1) = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Bx}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

avec $\mathbf{D}$ la matrice formée par les éléments diagonaux de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$.

Application : $\mathbf{x}(1) = \left[\frac{1}{5},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right]^\top$.

NOM : ....

Exercice 4 : Intégration numérique - 6 points

Pour toute fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, on s'intéresse à l'approximation de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ par $J(f)$ où

$$\boxed{J(f) = \frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}f(1)}$$

1. **0.5 point.** Déterminer le plus grand entier N tel qu'on ait $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p)$ pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à N.

   Solution.-

2. Soient une application $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ et p_f son polynôme d'interpolation en les quatre points
$$\boxed{t_0 = -1, t_1 = -\frac{1}{3}, t_2 = \frac{1}{3}, t_3 = 1.}$$

   (a) **0.5 point.** Montrer que $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p_f(t)\,dt.$

   Solution.-

   (b) On pose $M_4(f) = \sup\limits_{t\in[-1,1]} \left|f^{(4)}(t)\right|$.

   (i) **1 point.** Redémontrer la formule d'erreur d'interpolation vue en T.D.

   Solution.-

   (ii) **1 point.** Prouver que

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \left|\left(t^2-1\right)\left(t^2-\frac{1}{9}\right)\right| dt \leq \frac{2}{9}}$$

   Solution.-

   (iii) **1 point.** En déduire l'inégalité suivante :

$$\boxed{\left|\int_{-1}^{1} f(t)\,dt - J(f)\right| \leq \frac{M_4(f)}{108}}$$

Solution.-

(c) $\boxed{\textbf{1 point.}}$ Comparer la présente méthode élémentaire d'intégration approchée et la méthode de Simpson.

Solution.-

3. $\boxed{\textbf{1 point.}}$ Soient $[a, b]$ un intervalle quelconque et $g : [a, b] \to R$ de classe C^4. Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, on pose

$$\boxed{x_k = a + k\frac{b-a}{3}}$$

Enfin, on définit $M_4(g) = \sup_{x \in [a,b]} \left|g^{(4)}(x)\right|$ et

$$K(g) = \frac{b-a}{8}\left(g(x_0) + 3g(x_1) + 3g(x_2) + g(x_3)\right)$$

En utilisant une application affine envoyant $[-1, 1]$ sur $[a, b]$, montrer que :

$$\boxed{\left|\int_a^b g(x)\,dx - K(g)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{3456} M_4(g)}$$

Solution.-