Résolution de Systèmes Linéaires

Cyrielle Gandon, Fabien Traventhal

12 avril 2012

1 Introduction

Dans ce TP, nous allons étudier la résolution de système linéaire (SEL) de manière numérique en comparant différents critères. Nous allons analyser l'impact de la dimension de la matrice, de la valeur du conditionnement et du type de méthode utilisée sur la qualité des résultats obtenus. Dans ce rapport, nous allons expliquer les méthodes employées, puis présenter les résultats et enfin discuter sur les résultats obtenus.

2 Contexte

Nous allons nous intéresser aux SEL du type :

$$Ax = b; A \in \mathbb{R}^{n \times x}, x, b \in \mathbb{R}^n$$

Le but de ce TP est d'étudier la qualité du resultat obtenu selon trois critères :
- La valeur du conditionnement de la matrice
- La dimension de la matrice
- La méthode de résolution
- Le coefficient de relaxation

2.1 Conditionnement d'une matrice

Le **conditionnement** donne une borne de l'erreur relative commise sur la solution x, ainsi une borne large peut entrainer des résultats expérimentaux inexploitables. Dans notre équation, une petite variation sur b peut entraîner une grande variation sur la solution x.

On définit le conditionnement d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ par :

$$\kappa_\alpha(A) = \| A \|_\alpha \| A^{-1} \|_\alpha$$

$\alpha = 2$

Dans notre étude, nous étudions trois valeurs différentes de κ : $10, 10^3, 10^6$

2.2 Dimension de la matrice

La dimension de la matrice est importante dans la qualité des résultats. En effet, le nombre d'opération augmente selon la taille de matrice. On choisit d'étudier quatres matrices carrées de taille différente : $n = 10, 50, 100, 150$

Ainsi, on pourra voir l'impacte de la taille d'une matrice sur la précision du résultat dans la résolution d'un système lineaire.

2.3 Méthodes de résolution

On étudie deux types de méthodes différentes pour la résolution de notre système.
- Méthode Directe
- Méthode Itérative

La **méthode directe** consiste à utiliser une fonction intégrée au logiciel Scilab : *linsolve*. Elle prend en paramètres d'entrées une matrice A et un vecteur b et retourne le vecteur solution x.

La **méthode itérative** qu'on utilisera sera celle de Jacobi. Pour résoudre le système linéaire, on utilise une suite $x(k)$ qui converge vers un point fixe x, qui sera solution du système $Ax = b$. On peut réecrire le système sous la forme : $x = (A + I)x - b$

La suite x(k) est donc définie par :

$$x(0) \in \mathbb{R}^n, x(k+1) = (A + I)x(k) - b$$

Le but de cette algorithme est d'atteindre un point fixe et le plus rapidement possible.

On décompose la matrice A en deux matrices :

$$A = M - N, \text{ avec M régulière.}$$

Ensuite, pour les matrices M faciles à extraires de A et immédiatemment inversibles, on peut prendre la diagonale de A ou bien une matrice triangulaire. On décompose la matrice A de la façon suivante :

$$A = D + L + U$$

D étant la diagonale, L la partie en dessous de la diagonale et U, la partie au dessus.

On prend $M = D$ et $N = -L - U$ pour enfin obtenir la formule suivante :

$$x(0) \in R^n, x(k+1) = -D^{-1}(L + U)x(k) + D^{-1}b$$

3 Présentation du programme

Pour étudier les différentes influences vu auparavant sur la résolution d'un SEL, nous avons codé en Scilab un programme permettant de faire cette étude. On peut paramètrer dans main.sce le nombre d'itération max que l'on veut pour la méthode de Jacobi, la taille de la matrice ainsi que la valeur du conditionnement. Une fois exécuté, notre programme permet d'afficher l'erreur pour la méthode directe, l'erreur résiduelle pour la méthode itérative ainsi que l'erreur à la k^{me} itération si la méthode converge. Si on atteint le nombre d'itérations maximum mais que l'utilisateur veut continuer d'exécuter l'algorithme, il lui suffit d'appuyer sur 1 ou sur un autre chiffre pour arrêter. Le programme permet également d'afficher le nombre d'itarations minimum pour atteindre le seuil de 10^{-8} pour l'erreur résiduelle.

4 Résultats

Voici les résultats obtenus pour chaque méthode, en fonction de la dimension n de la matrice et du conditionnement κ :

4.1 Méthode Directe

	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 150$
$\kappa = 10$	3.82×10^{-15}	1.12×10^{-14}	1.92×10^{-14}	2.62×10^{-14}
$\kappa = 10^3$	5.82×10^{-14}	1.49×10^{-13}	1.57×10^{-13}	2.62×10^{-13}
$\kappa = 10^6$	6.14×10^{-11}	9.41×10^{-11}	9.047	11.063

4.2 Méthode Jacobi : Erreur résiduelle

	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 150$
$\kappa = 10$	9.88×10^{-9}	9.02×10^{-9}	9.53×10^{-9}	9.8×10^{-9}
$\kappa = 10^3$	diverge	9.99×10^{-9}	9.99×10^{-09}	1×10^{-8}
$\kappa = 10^6$	diverge	1.00×10^{-8}		

A cause du trop grand nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le système avec une erreur résiduelle inférieure à 10^{-8} pour $\kappa = 10^6$ et $n = 100, 150$, notre programme n'a pas réussi à trouver les valeurs.

4.3 Méthode Jacobi : Erreur à l'itération i

	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 150$
$\kappa = 10$	6.41×10^{-8}	2.00×10^{-7}	3.00×10^{-7}	3.00×10^{-7}
$\kappa = 10^3$	diverge	9.30×10^{-6}	1.48×10^{-05}	1.90×10^{-5}
$\kappa = 10^6$	diverge	5.17×10^{-3}		

Étant donné que nous calculons cette erreur à l'itération où l'erreur résiduelle est inférieure à 10^{-8} et que nous n'avons pas réussi à atteindre ce seuil pour $\kappa = 10^6$ et $n = 100, 150$, nous n'avons pu renseigner les deux cases vides.

5 Interprétation des résultats

Nous allons maintenant pouvoir étudier l'influence du conditionnement et de la taille de la matrice sur la qualité du résultat. Pour chacun des deux critères, nous comparerons aussi la méthode utilisée.

5.1 Influence du conditionnement

On voit que le conditionnement à une influence différente suivant la méthode employée. En effet, avec la méthode directe, alors que κ augmente de 10^5 la précision du résultat diminue d'un facteur 10^3 alors que pour la méthode itérative et en se fiant à l'erreur résiduelle la précision diminue d'un facteur 10. Cependant, en se fiant à l'erreur lors de la k-ième itération, la perte de précision est de l'ordre de 2.10^4. Le conditionnement a aussi un grand impact sur la convergence de la méthode de Jacobi puisque c'est la première élément qui entraîne une divergence de cette dernière lors de notre expérience.

5.2 Influence de la taille de la matrice

Contrairement, au conditionnement de la matrice, sa taille à une influence plutôt négligeable sur la qualité du résultat. En effet, pour la méthode itérative, la qualité du résultat est constante alors que pour la méthode directe on observe un facteur 10. Cependant, la taille de la matrice augmente de manière considérable le nombre d'itérations et donc le temps nécessaire pour atteindre le seuil de 10^{-8}. La taille a également une influence sur la convergence pour la méthode Jacobi. Dans notre cas, une matrice trop petite, pour un conditionnement trop grand à entraîner la divergence.

5.3 Influence de la méthode utilsée

La méthode directe semble être la méthode la plus à même de résoudre un système d'équations linéaires car elle présente des résultats plus précis et avec un temps de calcul beaucoup plus court. De plus, elle ne nécessite pas l'acceptation par un critère de convergence pour fonctionner. Cependant, on peut voir qu'elle peut avoir des limites lorsque la taille de la matrice et le conditionnement augmentent. Dans ce cas là, la méthode de Jacobi peut paraître plus adaptée mais encore faut-il que l'ordinateur soit assez puissant ou que l'algorithme ait une complexité optimale pour donné un résultat en un temps satisfaisant.

5.4 Influence de la relaxation

Pour ce qui est de la méthode de Jacobi relaxée, nous n'avons pas réussi à obtenir une convergence pour un autre coefficient que 1.0 qui correspond à la méthode de Jacobi sans relaxation. Nous ne pourrrons donc pas faire de conclusion par rapport à cela.

6 Conclusion

Si on regarde la précision des résultats obtenus, la méthode directe est la plus efficace. La seule limite de cette méthode est la taille de la matrice. Or, celle ci à une influence négligeable. Aussi, dans la méthode de Jacobi, le nombre d'itération pour atteindre le seuil souhaité de l'erreur résiduelle est d'environ 10^7 itérations pour $\kappa = 10^6$ et $n = 150$. La complexité de l'algorithme de cette méthode est donc très importante, ce qui rend les résultats très difficiles à obtenir quand le conditionnement de la matrice est élevé. Ainsi, pour avoir un résultat fiable, il est essentiel d'avoir une matrice bien conditionnée, c'est à dire une valeur de κ faible car nous avons pu voir que c'était le facteur qui avait le plus d'influence.