

# ANALYSE NUMÉRIQUE

## T.P. N° 1

BERTIN CLÉMENT  
NGUYEN GUILLAUME

---

**N° Groupe : A2**

---

Observations :

---

	ANALYSE	:	
	RÉSULTATS	:	
Notes :	PROGRAMMATION	:	<b>Total :</b>
	RAPPORT	:	

---



# Rapport T.P. N°1

12 avril 2012

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Analyse</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Méthodes et programme</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Résultat</b>	<b>3</b>
4.1	Comparaison méthode directe et méthode de Jacobi . . . . .	3
4.2	Comparaison méthode directe et méthode de Jacobi relaxée . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Discussion</b>	<b>6</b>
5.1	Discussion sur les résultats 4.1 . . . . .	6
5.1.1	Influence de la taille de la matrice . . . . .	6
5.1.2	Influence du conditionnement de la matrice . . . . .	6
5.2	Discussion sur les résultats 4.2 . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>8</b>

# 1 Introduction

Dans ce TP d'analyse numérique, on s'intéresse à la résolution d'un système d'équation linéaire du type :

$$Ax = b \text{ avec } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } b \in \mathbb{R}^n$$

L'objectif est de :

- comparer la méthode directe de Scilab et la méthode itérative de Jacobi
- évaluer l'influence du conditionnement de la matrice A
- de mettre en évidence l'importance du coefficient de relaxation pour le nombre d'itérations.

# 2 Analyse

Dans le sujet, on nous donne la méthode pour construire la matrice A. A partir de là, on nous fourni la solution exacte  $\xi$  de l'équation  $Ax = b$ . Connaissant A et  $\xi$ , on construit  $b$ .

Pour résoudre ce système d'équation linéaire, une première méthode consiste à utiliser la fonction « linsolve » de Scilab.  $linsolve[A, -b]$  donne toutes les solutions de  $Ax = b$ .

On étudiera ensuite une méthode itérative : la méthode de Jacobi. Elle permet elle aussi de résoudre les système de la forme  $Ax = b$ . Dans cette méthode, on utilise une suite récurrente de la forme :

$$\begin{cases} x(0) = [000\dots 0]^T \\ x(k+1) = -D^{-1}(L+U)x(k) + D^{-1}b \end{cases}$$

Avec :

- k : n d'itération
- D : diagonale de A
- L : partie de A strictement inférieure à la diagonale
- U : partie de A strictement supérieure à la diagonale

Cette suite converge vers un point fixe : la solution du système d'équations linéaires.

A la méthode itérative de Jacobi, on associe le vecteur erreur  $e(k)$  définie par :  $e(k) = \xi - x(k)$ . On cherchera à avoir  $\|e(k)\| \leq 10^{-8}$ . On sait que pour avoir  $\left\| \frac{e(k)}{e(0)} \right\| \leq 10^{-H}$  il faut  $m \geq \frac{-H}{\log \rho(R_J)}$  itérations (avec  $H > 0$ ).  $\rho(R_J)$  représente le rayon spectral de la matrice  $R_J$ , matrice d'itération de Jacobi définie par :  $R_J = -D^{-1}(L+U)$ . Le but est donc de déterminer ce facteur H. Étant donné que l'on doit avoir :

$$\begin{cases} \|e(k)\| \leq 10^{-8} \\ \|e(k)\| \leq 10^{-H} \|e(0)\| \end{cases}$$

On en déduit facilement que l'on doit avoir :  $10^{-H} \|e(0)\| = 10^{-8}$ . D'où les deux définitions de  $H$  équivalentes :

$$H = \frac{\log(10^8 \cdot \|e(0)\|)}{\log(10)} \Leftrightarrow H = \frac{-\log(\frac{10^{-8}}{\|e(0)\|})}{\log(10)}$$

On a plus qu'à remplacer dans la formule de  $m$ .

Enfin, pour résoudre l'équation  $Ax = b$  on peut aussi appliquer une procédure de relaxation avec comme méthode itérative de base la méthode de Jacobi. On définit la méthode de Jacobi relaxée comme suit :

$$\begin{cases} x(0) \in \mathbb{R}^n \\ x(k+1) = [(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)]x(k) + \omega D^{-1}b \end{cases}$$

On appellera  $\omega$  le coefficient de relaxation. On pourra dès lors réutiliser la démarche décrite ci-dessus (pour diminuer l'erreur  $e(k)$  d'un facteur  $H$ ) en utilisant la matrice d'itération de Jacobi relaxée ( $R_{J\omega}$ ) définie par :

$$(R_{J\omega}) = (1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)$$

### 3 Méthodes et programme

Le programme est fourni dans un dossier en complément du rapport.

## 4 Résultat

### 4.1 Comparaison méthode directe et méthode de Jacobi

Dans les résultats qui suivent, quand on a appliqué la méthode itérative de Jacobi, l'itération maximale correspondait au  $m$  que l'on a calculé selon la méthode décrite précédemment.

Pour  $\kappa = 10$ .

	$n = 10$	$n = 50$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000000038201998	0.0000000000000111928983
$m$ exacte	106.43808037058552429244	161.2565623975049504679
$m$ pris	107	162
Erreur obtenue (Jacobi)	0.0000000084766587544985	0.0000000082889589991282

	$n = 100$	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000000192446842	0.000000000000260207004
$m$ exacte	176.93636632902826022473	183.98412915816450663442
$m$ pris	177	184
Erreur obtenue (Jacobi)	0.0000000089880193406147	0.0000000090217715922564

Pour  $\kappa = 1000$ .

	$n = 10$	$n = 50$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000000581608534	0.0000000000001494145720
$m$ exacte	–	13576.338351763177342946
$m$ pris	–	13577
Erreur obtenue (Jacobi)	–	0.0000000090832395296820

Pour  $n = 10$ , le rayon spectral de  $R_J$  est strictement supérieur à 1 ( $\rho(R_J) = 2.0532615944720840062132$ ). La méthode itérative de Jacobi est donc divergente et ne peut pas apporter de résultats.

	$n = 100$	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000001571029524	0.0000000000002618076328
$m$ exacte	16284.350880037069146056	17545.564066345476021525
$m$ pris	16285	17546
Erreur obtenue (Jacobi)	0.0000000090423904597132	0.0000000090301670775670

Pour  $\kappa = 10^8$ .

	$n = 10$	$n = 50$
Erreur obtenue (méthode directe)	2.9656871065843173340681	6.4275113080298043044536
$m$ exacte	–	–
$m$ pris	–	–
Erreur obtenue (Jacobi)	–	–

Pour  $n = 10$  et  $n = 50$ , le rayon spectral de  $R_J$  est strictement supérieur à 1 (respectivement :  $\rho(R_J) = 5.4638944297547338280197$  et  $\rho(R_J) = 1.3424737199301266521445$ ). La méthode itérative de Jacobi est donc divergente et ne peut pas apporter de résultats.

	$n = 100$	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	9.047337474667358492297	11.0628730405313540075
$m$ exacte	1241098118.8927767276764	1434752262.4659852981567
$m$ pris	50000	50000
Erreur obtenue (Jacobi)	9.0371017947321714558484	11.053996448060436463834

Le  $m$  trouvé est beaucoup trop grand pour être appliqué. Cependant, on a quand même effectué le calcul de l'erreur avec 50000 itérations pour avoir une idée de cette erreur.

Pour  $\kappa = 10^{16}$ .

	$n = 10$	$n = 50$
Erreur obtenue (méthode directe)	2.9656871066071275322429	6.4275113081028347750134
$m$ exacte	-	-
$m$ pris	-	-
Erreur obtenue (Jacobi)	-	-

	$n = 100$	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	9.5361110462022207201471	11.660949548373016781966
$m$ exacte	-	-
$m$ pris	-	-
Erreur obtenue (Jacobi)	-	-

Pour  $n = 10$ ,  $n = 50$ ,  $n = 100$  et  $n = 150$  le rayon spectral de  $R_J$  est strictement supérieur à 1 :

- pour  $n = 10$ ,  $\rho(R_J) = 8.6380572530149386523135$
- pour  $n = 50$ ,  $\rho(R_J) = 3.6902891173993732643055$
- pour  $n = 100$ ,  $\rho(R_J) = 1.5827442828771520755282$
- pour  $n = 150$ ,  $\rho(R_J) = 1.018360050229818458689$

La méthode itérative de Jacobi est donc divergente et ne peut pas apporter de résultats.

## 4.2 Comparaison méthode directe et méthode de Jacobi relaxée

Dans la suite nous allons comparée la méthode de Jacobi relaxée avec la méthode directe de Scilab. Comme précédemment, les résultats trouvés ont été calculés à partir de  $m$  itérations.

Pour  $\omega = 0.5$

	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000033732969774
$m$ exacte	335793.06588049395941198
$m$ pris	150000
Erreur obtenue (Jacobi)	0.0009644110869481158956

Pour  $\omega = 0.8$

	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000033732969774
$m$ exacte	209866.74245138201513328
$m$ pris	150000
Erreur obtenue (Jacobi)	0.0000035346193914454976

Pour  $\omega = 1.2$

	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000033732969774
$m$ exacte	139907.6738228465255816
$m$ pris	139908
Erreur obtenue (Jacobi)	0.0000000090321652564271

Pour  $\omega = 1.5$

	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000033732969774
$m$ exacte	111924.04634081138647161
$m$ pris	111925
Erreur obtenue (Jacobi)	0.0000000090312866433029

Pour  $\omega = 1.8$

	$n = 150$
Erreur obtenue (méthode directe)	0.0000000000033732969774
$m$ exacte	–
$m$ pris	–
Erreur obtenue (Jacobi)	–

Le rayon spectral est strictement supérieur à 1 :

$$- \rho(R_{J\omega}) = 1.2433958534232529835606$$

Il y a donc divergence, la méthode de Jacobi relaxée n'apporte pas de résultats pour  $\omega = 1.8$ .

## 5 Discussion

### 5.1 Discussion sur les résultats 4.1

#### 5.1.1 Influence de la taille de la matrice

Pour un conditionnement donné, de manière générale, plus la taille de la matrice augmente plus l'erreur obtenue par la méthode directe augmente. Cela est tout à fait normal puisque plus la matrice est grande, plus on doit faire de calcul et donc plus l'erreur se propage.

Concernant la méthode itérative de Jacobi, on a cherché le nombre d'itérations à effectuer pour avoir une erreur de l'ordre de  $10^{-8}$ , il est donc tout à fait normal que peu importe la taille de la matrice, l'ordre de grandeur de l'erreur reste le même. On remarquera cependant, que le " $m$ " a trouvé a tendance à augmenter quand la taille de la matrice augmente. Ceci est encore tout à fait normal puisque comme on l'a dit, plus la matrice est grande, plus il y a de calculs à effectuer et donc plus il faut effectuer d'itérations pour avoir une erreur de l'ordre de  $10^{-8}$ .

#### 5.1.2 Influence du conditionnement de la matrice

Concernant la méthode directe, pour une taille de matrice donnée, quand le conditionnement augmente on remarque que l'erreur augmente aussi.

Pour la méthode de Jacobi, même constat que précédemment : l'ordre de grandeur de l'erreur reste le même, seul le nombre d'itérations à effectuer augmente de manière significative. Par exemple pour une matrice de taille 50x50, il faut effectuer 162 itérations quand  $\kappa = 10$ , alors qu'il en faut 13577 quand  $\kappa$  vaut 1000.

On associe la notion de conditionnement à la notion de stabilité. Ainsi, plus le conditionnement est grand, plus la solution du système linéaire est sensible aux perturbations.

Ainsi, les résultats trouvés peuvent paraître surprenant car pour un environnement donné, le conditionnement de la matrice ne devrait pas influencer sur le résultat du problème et donc sur l'erreur relative à ce résultat. En effet, pour une taille de matrice donnée,  $b$  ne change pas pourtant on voit bien que le conditionnement a une influence sur l'erreur du système linéaire et donc sur la solution de ce système. On met donc en évidence le fait que même si  $b$  n'est pas perturbé, la solution peut l'être.

On remarque aussi pour la méthode de Jacobi, que plus le conditionnement est grand, plus il faut que la taille de la matrice soit grande pour qu'on ait convergence. Exemple quand  $\kappa = 10$ , pour n'importe quelle taille de matrice on a convergence alors que quand  $\kappa = 1000$  il n'y a plus convergence pour  $n = 10$ . Quand  $\kappa = 10^8$  il n'y a plus convergence pour  $n = 10$  et  $n = 50$ . Enfin quand  $\kappa = 10^{16}$ , il n'y a jamais convergence.

Le conditionnement de la matrice doit donc avoir une influence sur le rayon spectral (Pour rappel, la méthode de Jacobi converge si et seulement si  $\rho(R_J) > 1$ ). En effet, pour une taille de matrice donnée,  $\rho(R_J)$  augmente quand  $\kappa$  augmente. Par exemple :

- pour  $n = 10$ 
  - pour  $\kappa = 10$  on a  $\rho(R_J) = 0.8320345549769496695802$
  - pour  $\kappa = 1000$  on a  $\rho(R_J) = 2.0532615944720884471053$
- pour  $n = 50$ 
  - pour  $\kappa = 10$  on a  $\rho(R_J) = 0.8812958118371200244567$
  - pour  $\kappa = 1000$  on a  $\rho(R_J) = 0.9985002282866376477344$
  - pour  $\kappa = 10^8$  on a  $\rho(R_J) = 1.3424737199301246537431$

Et ainsi de suite.

On se rend ainsi compte de l'impact du conditionnement sur le rayon spectral.

## 5.2 Discussion sur les résultats 4.2

Concernant la méthode directe, il n'y a pas grand-chose à dire. L'erreur reste constante au cours des différents tests puisqu'on a décidé de garder constante la taille et le conditionnement de la matrice.

Pour la méthode de Jacobi relaxée, on se rend compte que plus le coefficient de relaxation est petit, plus il faut d'itérations pour avoir une erreur de l'ordre de  $10^{-8}$ . De plus, pour les coefficients  $\omega = 0.5$  et  $\omega = 0.8$ , le nombre d'itérations demandées est irréalisable en Scilab. Nous avons donc fixés le nombre d'itérations à 150 000 (ce qui prend déjà énormément de temps) et malgré cela, on arrive qu'à une erreur de l'ordre de  $10^{-4}$  pour  $\omega = 0.5$ .

A partir de nos résultats, on ne peut pas conclure à une relation entre le coefficient de relaxation et le rayon spectral car de  $\omega = 0.5$  à  $\omega = 1.5$  le rayon

spectral diminue, mais pour  $\omega = 1.8$  il devient strictement supérieur à 1 et entraîne une divergence.

Enfin il semblerait que cette méthode ne soit pas très efficace car elle prend beaucoup de temps (du au nombre important d'itérations à effectuer) et ne donne pas de résultats plus précis que la méthode directe.

## 6 Conclusion

Nous pouvons conclure sur ce T.P. sur le fait que le conditionnement joue un rôle majeur dans la précision de la solution d'un système d'équation linéaire. Ainsi, plus ce conditionnement sera proche de 1, plus le problème sera bien conditionné et donc stable.

La méthode itérative de Jacobi ne permet pas de donner tout le temps des résultats mais quand on peut obtenir ces solutions, on les obtient assez rapidement (il n'y a pas forcément besoin de faire beaucoup d'itération) et les résultats sont assez précis même si l'erreur est plus grande que pour les résultats trouvés grâce à la méthode directe.

Enfin, la méthode de Jacobi relaxée n'est pas vraiment utilisable dans la mesure où elle réclame beaucoup d'itérations (donc beaucoup de temps) pour des résultats moins précis que ceux de la méthode directe.