DS Analyse 2 - Janvier 2013

Titre de la note 09/02/2013

I 1) méthode de substitution

$x_3^2 = x_2 + 1$, $x_4 = x_1$

$\Rightarrow$ Il faut optimiser

$$G(x_1, x_2) = x_1 - 4x_1^2 - 2x_2^2 - x_2 - 1 + x_1$$
$$= 2x_1 - 4x_1^2 - 2x_2^2 - x_2 - 1$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 2 - 8x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = -4x_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ un seul point critique $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = -8 = p \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} = -4 = q \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} = r = 0$$

$pq - r^2 = pq > 0$ avec $p < 0, q < 0 \Rightarrow$ G admet un maximum local strict pour $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$

$x_3^2 = \frac{3}{4}$, $x_4 = \frac{1}{4}$

$$\mathrm{Opt}\left(G(x_1, x_2, x_3, x_4)\right) = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{2}{16} + \cancel{\frac{1}{4}} - 1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{5}{8}}$$

Méthode du Lagrangien

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = G(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x)$$ avec $h_1(x) = x_3^2 - x_2 - 1$

$h_2(x) = x_4 - x_1$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0$$

$$\begin{cases} (1) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 - 8x_1 - \lambda_2 = 0 \\[2mm] (2) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -4x_2 - \lambda_1 = 0 \\[2mm] (3) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = -2x_3 + 2\lambda_1 x_3 = 0 \\[2mm] (4) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_4} = 1 + \lambda_2 = 0 \\[2mm] (5) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = h_1(x) = x_3^2 - x_2 - 1 = 0 \\[2mm] (6) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = h_2(x) = x_4 - x_1 = 0 \end{cases}$$

$$(4) \Rightarrow \lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \left\{ (1) \Rightarrow 2 - 8x_1 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = \frac{1}{4}} \right\}$$

$(6) \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4}$

$(3) \Rightarrow 2x_3(\lambda_1 - 1) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ ou $\lambda_1 = 1$

<u>1° cas</u> $\lambda_2 = -1, \quad x_3 = 0$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x_1 - 4x_1^2 - 2x_2^2 + \cancel{x_4} - \lambda_1(x_2 + 1) - (\cancel{x_4} - x_1)$$

$$= 2x_1 - 4x_1^2 - 2x_2^2 - \lambda_1 x_2 - \lambda_1$$

$(2) \quad \lambda_1 = -4x_2$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x, \lambda) = 2x_1 - 4x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_2^2 + 4x_2 = 2x_1 - 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} = -8 = p \; ; \; \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} = 4 = q \; , \; \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \Rightarrow pq < 0$$

$\Rightarrow$ pas d'extremum (point selle)

<u>2° cas</u> $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = x_1 - 4x_1^2 - 2x_2^2 - \cancel{x_3^2} + \cancel{x_4} + \cancel{x_3^2} - x_2 - 1 - \cancel{x_4} + x_1$$
$$= 2x_1 - 4x_1^2 - 2x_2^2 - x_2 - 1$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} = -8 = p < 0 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} = -4 = q < 0 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$\Rightarrow$ maximum pour $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$

$$\text{Opt } G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = \boxed{-\frac{5}{8}}$$

II i) $(\mathbb{R}, d)$ $\quad d(x,y) = |x-y|$

$I = [0,1]$

a) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé - norme $|x|$

Il est complet car toute suite de Cauchy converge

b) $I = [0,1]$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$

car par exemple $x = \frac{3}{2} \in I$ et $2x = 3 \notin I$

c) I est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$ car si $a \in I$, $b \in I$

$[a,b] \subset I$

d) I est un intervalle $\Rightarrow$ C'est une partie connexe de $\mathbb{R}$
(d'un seul tenant)

e) $J = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ est un sous-ensemble de I qui n'est pas connexe.

ii) $I = [0,1]$ $\quad$ $\mathcal{B}(I) = \{g : I \to \mathbb{R}, g \text{ bornée}\}$

$= \{g : I \to \mathbb{R} ; \exists M > 0 \text{ tel que } |g(x)| \leq M \quad \forall x \in I\}$

a) $\mathcal{B}(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il est normé par la norme

$g \in \mathcal{B}(I)$ $\qquad \|g\| = \sup_{x \in I} |g(x)|$

distance associée : $g_1 \in \mathcal{B}(I)$, $g_2 \in \mathcal{B}(I)$

$$\tilde{d}(g_1, g_2) = \sup_{x \in I} |g_1(x) - g_2(x)|$$

<u>$\mathcal{B}(I)$ est complet</u> : soit $\{g_k\}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(I)$

cad $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tel que $\forall n, p \geq N$ $\quad \|g_n - g_p\| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in I \quad |g_n(x) - g_p(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in I$ la suite $\{g_n(x)\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet

$\Rightarrow g(x) = \lim_{k \to +\infty} g_k(x)$ existe

<u>A montrer : $g \in \mathcal{B}(I)$</u> cad est bornée

$\{g_k\}$ suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(I)$ $\Rightarrow$ elle est bornée cad

$\exists M$ tel que $\forall k$ $\|g_k\| \leq M$ $\Rightarrow$ $|g_k(x)| \leq M$ $\quad \forall x \in I$

quand $k \to +\infty$, on obtient $|g(x)| \leq M \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow g \in \mathcal{B}(I)$

A montrer : $\{g_k\}$ converge vers g dans $\mathcal{B}(I)$

On a : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ tel que $\forall n, p \geq N$, $\forall x \in I$

$$|g_n(x) - g_p(x)| \leq \|g_n - g_p\| \leq \varepsilon$$

Quand $p \to +\infty$, on obtient

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall x \in I$, $|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \sup_{x \in I} |g_n(x) - g(x)| = \|g_n - g\| \leq \varepsilon$$

c.a.d $\{g_k\}$ converge vers g dans $\mathcal{B}(I)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}(I)$ est un espace de Banach

b) $f(x) = \dfrac{1}{4+x} \qquad x \in I$

1. $0 \le x \le 1 \Rightarrow 4 \le 4+x \le 5 \Rightarrow 0 < \frac{1}{5} \le \frac{1}{4+x} = f(x) \le \frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow f(I) \subset I$

2. $\forall x \in I \qquad |f(x)| = f(x) \le \frac{1}{4} \Rightarrow f \in \mathcal{B}(I)$

3. f est dérivable sur I

f convexe $\Leftrightarrow$ f' croissante $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

f concave $\Leftrightarrow$ $f''(x) \le 0 \quad \forall x \in I$

Ici $f'(x) = -\frac{1}{(4+x)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(4+x)^3} > 0 \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow$ <u>f convexe sur $[0,1]$</u>

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{5}$

$\min_{x \in I} f(x) = \frac{1}{5}$ atteint en 1

$\max_{x \in I} f(x) = \frac{1}{4}$ atteint en 0

4. Théorème des accroissement finis $\Rightarrow$

$\forall x, y \in I \quad \exists z \in]0,1[$ tel que $\quad f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(z)|\,|x-y|$

$|f'(z)| = \dfrac{1}{(4+z)^2} \leq \dfrac{1}{16} \quad \Rightarrow \underline{\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{16}|x-y|}$

$\Rightarrow f$ est contractante

5. Points fixes de f : $\quad f(x) = x = \dfrac{1}{4+x}$

$\Leftrightarrow x(4+x) = 1 \quad \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$

$\Delta' = 4 + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 + \sqrt{5} \qquad x_2 = -2 - \sqrt{5}$

$x_2 \notin I \qquad x_1 \in I$

$\Rightarrow$ point fixe de f : $x = x_1 = \sqrt{5} - 2 \in I$

6. D'après le Théorème du point fixe, f contractante sur I admet un point fixe unique x_0 tel que $f(x_0) = x_0$. Les calculs de 5. montrent que $\boxed{x_0 = \sqrt{5} - 2}$

III a) $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx \right)^{1/2}$

$d(f, g) = \|f - g\|$

$\mathcal{L}^2$ est un espace de Banach pour $\|\cdot\|$ et un espace de Hilbert pour $\langle \cdot , \cdot \rangle$ (cf cours)

b) $\mathcal{V} = \{ \phi_n(x) \}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\mathcal{V}_{S_4} = \{ S_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \, \phi_i(x) \}$$

$\mathcal{V}_{S_4}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}^2$ de dimension finie $\Rightarrow$

$\mathcal{V}_{S_4}$ est complet $\Rightarrow$ $\mathcal{V}_{S_4}$ est fermé

$$g(x) = 5x^3 - 3x$$

$$g_\perp(x) = \sum_{i=0}^{4} \langle g, \phi_i \rangle \, \phi_i(x)$$

$$g(x) = 2\sqrt{\frac{2}{7}} \, \phi_3(x) \quad \Rightarrow g_\perp(x) = 2\sqrt{\frac{2}{7}} \sum_{i=0}^{4} \langle \phi_3, \phi_i \rangle \, \phi_i(x)$$

\) système orthonormal $\rightarrow$ $\langle \phi_3, \phi_i \rangle = 0$ pour $i \neq 3$

polynômes de Legendre orthonormalisés $\Rightarrow$ $\langle \phi_3, \phi_3 \rangle = \| \phi_3 \|^2 = 1$

$\Rightarrow g_\perp(x) = 2\sqrt{\frac{2}{7}}\ \phi_3(x) = g(x)$

normal car $g \in \mathcal{S}_4$ $\Rightarrow$ $\boxed{g_\perp = g}$

d) $d(g, S_4)^2 = \|g - S_4\|^2 = \langle g - \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \phi_i, g - \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \phi_i \rangle$

$$= \|g\|^2 + \sum_{i=0}^{4} \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \langle g, \phi_i \rangle$$

on minimise par rapport aux α_i

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha_i} d(g, S_4)^2 = 0 \qquad i = 0, \dots, 4$

$\Rightarrow 2\alpha_i - 2\langle g, \phi_i \rangle = 0 \qquad i = 0, \dots, 4$

$\Rightarrow \alpha_i = \langle g, \phi_i \rangle$

et on retrouve la fonction g précédente

$g_\perp(x) = \sum_{i=0}^{4} \langle g, \phi_i \rangle \phi_i = g(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{g_\perp = g}$

c) $g_\perp$ est l'unique élément de $\mathcal{V}_{S_4}$ tel que $(g-g_\perp) \perp \mathcal{V}_{S_4}$

cad $\langle g-g_\perp , s_4 \rangle = 0 \quad \forall s_4 \in \mathcal{V}_{S_4}$

comme $g \in \mathcal{V}_{S_4}$ et $g_\perp \in \mathcal{V}_{S_4} \Rightarrow g-g_\perp \in \mathcal{V}_{S_4}$ (espace vectoriel)

avec $s_4 = g-g_\perp$ on obtient $\|g-g_\perp\|^2 = 0 \Rightarrow \boxed{g = g_\perp}$