E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

ANALYSE II (Esp.Topologiques et Métriques-Connexité Convexité-Optimisation-Proj.Orthogonale)
Devoir surveillé n^o 1
donné le 20 janvier 2012
(Durée 2h) **(tout document et calculatrice sont interdits)**

I (6 *Pts.*)

Résoudre le problème d'optimisation suivant par la **méthode de substitution et la méthode du Lagrangien** :

$$Opt_{(x_i;i=1\ldots4)}\{G(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1^2 + x_1 - x_2^2 - \frac{x_3}{2} + \frac{x_4^2}{2}\}$$

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{c} g_1(x_1x_4) : x_4^2 - x_1 = 1 \\ g_2(x_2,x_3) : x_3 - 4x_2 = 1 \end{array} \right\}$$

II (8 *Pts.*)

– **i)**
Soit l'espace metrique $(\mathbb{R}, d)$ muni de la distance habituelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) = |x-y|$$

et soit $I = [-2, 2]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

a) Est-ce-que $\mathbb{R}$ est un espace de Banach ? Justifier votre réponse.

b) Est-ce-que $I \subset \mathbb{R}$ est un sous-espace de Banach ? Justifier votre réponse.

c) Est-ce-que $I \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble **connexe** de $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

d) Est-ce-que $I \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble **convexe** de $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

e) Trouver un sous ensemble de I qui **n'est pas connexe**. Justifier votre réponse.

– **ii)** On considère toujours le même intervalle : $I = [-2; 2] \subset \mathbb{R}$.
Soit l'espace $\mathcal{B}(I)$ des fonctions g **bornées** définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ($g(I) \subset \mathbb{R}$ ensemble borné). On munit $\mathcal{B}(I)$ de la "distance de la convergence uniforme" :

$$\forall (g_1, g_2) \in (\mathcal{B}(I))^2 : \tilde{d}(g_1,\ g_2) = \sup_{x\in I} |g_1(x) - g_2(x)|\,.$$

a) Donner les étapes importantes pour montrer que $(\mathcal{B}(I), \tilde{d})$ (muni de cette distance) est un espace de Banach.

b) On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f: & I \rightarrow & I \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x}{4} \end{array}$$

1. Est- ce que f appartient à $\mathcal{B}(I)$? Justifier votre réponse.
2. Etudier la convexité ou concavité de la fonction f sur I. Admet t-elle un (ou plusieurs) optimum ? **Préciser**.
3. Déterminer le sup de la dérivée : $\sup_{x\in I}\ |f'(x)|$ sur I.
4. Est-ce que f est contractante sur I ? Justifier votre réponse.
5. Y a-t-il un ou plusieurs points fixes de f sur I ? Justifier votre réponse (avec des calculs précis).
6. Expliquer si **oui ou non** votre réponse à la question précédente serait conséquence directe de l'application d'un théorème du cours. Donner l'énoncé précis de ce théorème.

III (6 *Pts.*)

Soit $\mathcal{L}_2$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de carré intégrables d'après Lebesgue sur l'intervalle $[-1,\ 1]$. On munit cet espace avec le produit scalaire suivant :

$$\forall\ (f,\ g)\ \in\ \mathcal{L}_2^2\ :\ <f,g>=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

a) A partir de ce produit scalaire, définir une norme sur cet espace et la distance associée à cette norme. On fait l'hypothèse que l'espace $\mathcal{L}_2$ est **complet par rapport à cette distance**.

Est-ce-que $\mathcal{L}_2$ est un espace de Banach, ou de Hilbert (ou tous les deux) ?

b) On considère le système orthonormal de l'espace $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{V}=\{\ \phi_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots\ldots}$$

où ϕ_n sont les polynômes de Legendre orthonormalisés.

Soit $\mathcal{N}_{S4}$ le sous espace de $\mathcal{L}_2$ qui est engendré par toutes les combinaisons linéaires du type :

$$S_4(x)=\sum_{i=0}^{4}\alpha_i\phi_i(x)$$

$\mathcal{N}_{S4}$ est-il un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathcal{L}_2$?

Soit f la fonction étudiée dans **II ii)**.

Construire la projection orthogonale $f_\perp$ de f sur $\mathcal{N}_{S4}$. Données :

$$\begin{aligned}&\phi_0=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \phi_1=\sqrt{\frac{3}{2}}\,x,\quad \phi_2(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{3x^2-1}{2},\\ &\phi_3(x)=\sqrt{\frac{7}{2}}\,\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad \phi_4(x)=\sqrt{\frac{9}{2}}\,\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\end{aligned}\tag{0.0.1}$$

d) Quelle est la meilleure approximation de la fonction f par une série du type S_4?

Justifier votre réponse en minimisant la distance $d(f,\ S_4)$, (que vous avez définie dans a) de f par rapport à un vecteur quelconque de $\mathcal{N}_{S4}$.

Donner **l'énoncé** du théorème que vous avez appliqué.

e) Donner une autre méthode pour minimiser cette distance.