MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR
ANALYSE
II
TOPOLOGIE (III-IV)

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

Table des figures

Chapitre 3

TOPOLOGIE
III. Connexité

1 Espaces topologiques connexes

On présente trois définitions équivalentes de la connexité.

Intuitivement d'abord, la connexité est la notion qui nous fait dire qu'un ensemble tel que :

$$[0,\ 1] \cup [2,\ 3]$$

est non connexe car il est fait de deux "morceaux" alors que : $[0,\ 1]$ est fait d'"un seul morceau", donc il est connexe.

Définition 3.1.

Un espace topologique $(X,\ \mathcal{T})$ est connexe si et seulement si :

a) *Il n'existe aucune partition de X en deux parties ouvertes non vides*

$\Leftrightarrow$

b) *Il n'existe aucune partition de X en deux parties fermées non vides*

$\Leftrightarrow$

c) *Les seuls parties de X ouvertes et fermées sont X lui-même et l'ensemble vide.*

Exemple 3.1.

$\mathbb{R}$ est connexe.

$\mathbb{R}^k$ est connexe.

Définition 3.2 (Parties connexes)**.**

On dit qu'une partie E d'un espace topologique $(X,\ \mathcal{T})$ est connexe, (ou que c'est un connexe de X) si le sous-espace E de X (avec la topologie induite) est connexe.

Exemple 3.2.

a) $E_1 =]0,\ 1] \subset \mathbb{R}$ E_1 est connexe par la définition 3.2 et 3.1c).

b) $E_2 = [0,\ 1[\cup]2,\ 3]$:

L'intuition nous dit à priori que E_2 est non connexe. Mais où sont les deux ouverts disjoints ?

En considérant l'espace métrique $(\mathbb{R},\ d)$ où d est la distance habituelle et $(E_2,\ d_{E_2})$ sous-espace avec la métrique induite, on identifie $[0,\ 1[$ et $]2,\ 3]$ avec les boules ouvertes :

$$[0,\ 1[\ \Leftrightarrow B_0(0,\ 1)\ \ ]2,\ 3] \Leftrightarrow B_0(3,\ 1)$$

donc il s'agit bien de deux ouverts disjoints $\Rightarrow$ E_2 est non connexe. Plus précisément encore :

Remarque 3.1.

En général, pour les connexes d'un espace métrique, puisque les ouverts d'un sous-espace métrique $(A,\ d_A)$ sont de la forme $A \cap G$ (où $G =$ ouvert de $(E,\ d)$) et sont appelés ouverts relativement à A, on vérifie que :

Proposition 3.1. *Le sous-espace $(A,\ d_A)$ est une partie connexe de $(E,\ d)$ si et seulement si A n'est pas réunion de deux ouverts relativement à A, disjoints et non vides.*

Exemple 3.3.

L'exemple 3.2b), $E_2 = [0,\ 1[\cup]2,\ 3]$. Les ouverts relativement à E_2 sont :

$$[0,\ 1[\ = E_2 \cap]-1,\ 1[\ \text{ et }]2,\ 3] = E_2 \cap]2,\ 4[$$

$\Rightarrow$ E_2 n'est pas connexe (pour une fois de plus !)

Théorème 3.1 (Sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$)**.**

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (condition nécessaire et suffisante).

Remarque 3.2.

On a 9 types d'intervalles dans $\mathbb{R}$:

$$[a,\ b]\ ;\ ]a,\ b[\ ;\ \ [a,\ b[\ ;\ ]a,\ b]$$

$$[a,\ +\infty[\ ;\ ]a,\ +\infty[\ ;\ ]-\infty,\ a]\ ;\ ]-\infty,\ a[\ ;\ ]-\infty,\ +\infty[$$

Exemple 3.4.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas connexe et plus généralement (d'après le théorème 3.1) si une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas un intervalle alors A n'est pas connexe.

Donnons-en la preuve : Il existe 2 points $x,\ y \in A$ avec $x \neq y$ et $[x,\ y] \not\subset A$.

donc il existe $a \in [x,\ y]$ tel que $a \notin A$.

Les parties de $\mathbb{R}$, $A \cap]-\infty,\ a[$ et $]a,\ +\infty[\cap A$ (non vides) sont des ouverts relativement à A, et en constituent une partition donc A n'est pas connexe.

2 Réunion de parties connexes

Théorème 3.2.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique $(X,\ \mathcal{T})$. Si l'intersection de cette famille n'est pas vide sa réunion est connexe.

Preuve (pour le cas facile $\{A_1,\ A_2,\ A_3\}$)

Si $A = \cup A_i = O_2$ où $O_1,\ O_2$ ouverts disjoints. $(O_1 \cap O_2 = \emptyset)$

$\Rightarrow \forall i\ A_i \cap O_1$ et $A_i \cap O_2$ sont des ouverts relativement à A_i ; mais A_i est connexe

$$\Rightarrow A_i \cap O_1 = \emptyset \text{ ou } A_i \cap O_2 = \emptyset$$

Or tous les A_i ont en commun au moins un point a qui appartient par exemple à O_1. Donc O_1 contient tous les $A_i \Rightarrow O_2$ est vide. Donc l'hypothèse

$$\{O_1 \neq \emptyset \text{ et } O_2 \neq \emptyset,\ A = O_1 \cup O_2\}$$

conduit à une contradiction $\Rightarrow A$ est connexe.

Exemple 3.5.

Considérons les parties suivantes du plan $\mathbb{R}^2$.

$$A = \left\{(0,\ y) : \frac{1}{2} \leq y \leq 1\right\}$$

$$B = \left\{(x,\ y) : y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\ 0 < x \leq 1\right\}$$

Chaque point de A est un point d'accumulation de B donc $A \cap B \neq \emptyset$. On peut vérifier que A est connexe et B connexe (v. plus loin d'images de connexes par des applications continues) donc $A \cup B$ est connexe.

3 Fermeture et connexité

Théorème 3.3.

La fermeture de tout ensemble connexe est connexe.

Preuve :

Si $O_1 \cup O_2 = \overline{A}$ avec $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ on aura (comme A est connexe) : $A \cap O_1 = \emptyset$ ou $A \cap O_2 = \emptyset$. Or A est partout dense dans $\overline{A}$ donc ou bien $O_1 = \overline{A} \cap O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset \Rightarrow \overline{A}$ =connexe.

Exemple 3.6.

Toute sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ est connexe comme fermeture d'un espace homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

4 Intersection d'un connexe avec la frontière de $A \subset X$

Voici maintenant un résultat très utile pour la théorie d'intégration.

Théorème 3.4.

Soit A une partie de l'espace topologique $(X,\ \mathcal{T})$. Si E est un connexe de X tel que $\partial A \cap E = \emptyset$, alors $\left\{\begin{array}{rl} E & \subset int(A) \\ \textit{ou } E & \subset ext(A) \end{array}\right.$

Preuve :

On a : $\begin{cases} X = Int(A) \cup & Ext(A) \cup \partial A & \Leftrightarrow \text{recouvrement de } X \text{ et partition de } X \text{ car} \\ & Int(A) \cap \partial A & = \emptyset \\ & Ext(A) \cap Int(A) & = \emptyset \\ & Ext(A) \cap \partial A & = \emptyset \end{cases}$

Comme $E \cap \partial A = \emptyset$, les ouverts relativement à E qui sont : $A \cap Int(A)$ et $E \cap Ext(A)$, recouvrent E, mais E =connexe

$$\Rightarrow \; E \cap Int(A) = \emptyset \text{ ou } E \cap Ext(A) = \emptyset$$

5 Composantes connexes : "Morceaux" d'un espace non connexe

Définition 3.3.

a) *Pour tout point x d'un espace E, on appelle composante connexe de x, la réunion $C(x)$ des parties connexes de E qui contiennent x $\Leftrightarrow$ $C(x)$ est le plus grand connexe contenant x.*

$\Leftrightarrow$ ***Classe d'équivalence***

$x \approx y$ si et seulement si $\begin{cases} x \in C(x) \\ \text{et } y \in C(x) \end{cases}$

b) *On appelle composante connexe A_i de E toute partie "maximale" connexe de E.*

Exemple 3.7.

1) E connexe $\Rightarrow$ il n'y a qu'une seule composante connexe : E lui-même.

2) Dans l'espace $\mathbb{Q}$ tout sous ensemble connexe est réduit à un point

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q} \quad C(x) = \{x\}$$

3) Dans $\mathbb{R}^*$ composantes connexes : $]-\infty,\ 0[$ et $]0,\ +\infty[$

4) Dans $\mathbb{R}^2$ le sous-espace $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ a pour composantes connexes les droites $x \times \mathbb{Q}$.

5) Dans $\mathbb{R}^2$ le sous-espace constitué par la réunion de l'hyperbole $xy = 1$ et de ses asymptotes a trois composantes connexes.

6 Fonctions continues et connexité

1 Conservation de la connexité par continuité

Théorème 3.5.

Toute image continue d'un espace connexe est connexe.

Exemple 3.8.

Le graphe Γ de l'application $\begin{array}{ll}]0,\ 1] & \to \mathbb{R} \\ f : x & \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$ est une application continue de $]0,\ 1]$ par la fonction $g : x \in]0,\ 1] \mapsto g(x) = \left(x,\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ donc d'après le théorème 3.5, c'est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

2 Applications de la conservation de la connexité par continuité

Théorème 3.6 (Produit de deux espaces connexes)**.**
Soit E et F, deux espaces topologiques alors : $E,\ F$ connexes $\Leftrightarrow E \times F$ connexe.

Preuve (facile dans $\mathbb{R}^2$) :

La projection $p : (x,\ y) \mapsto x$ étant continue, $E = p(E \times F)$ est connexe lorsque $E \times F$ l'est (et pareil pour F).

Réciproquement

Soient $E,\ F$ connexes : si $a \in E,\ \{a\} \times F$ est connexe comme image du connexe F par l'injection canonique continue : $y \mapsto (a,\ y)$ de F dans $\{a\} \times F$.

Soient $(a,\ b)$ et $(a',\ b')$ deux éléments de $E \times F$. La composante connexe de $(a',\ b')$ contient $\{a'\} \times F$ donc $(a',\ b')$ et $E \times \{b\}$ donc aussi $(a,\ b)$$\Rightarrow$ deux éléments arbitraires de $E \times F$ appartiennent à la même composante connexe.

$\Rightarrow E \times F$ connexe.

Conséquence immédiate du théorème 3.6 est aussi la généralisation du théorème de la valeur intermédiaire de Weierstrass.

Théorème 3.7.
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application réelle continue définie sur un espace connexe X. Alors f admet comme valeur chaque nombre compris entre deux quelconques de ses valeurs.

7 Espaces localement connexes

Définition 3.4.
Un espace topologique $(X,\ \mathcal{T})$ est localement connexe si les ouverts connexes de X forment une base pour X.

Exemple 3.9.
Tout espace discret $(X,\ \mathcal{D})$ est localement connexe car si $p \in X$ alors $\{p\}$ est un ouvert connexe contenant p qui est contenu dans tout ouvert contenant p. Par contre, $(X,\ \mathcal{D})$ n'est pas connexe s'il contient plus d'un point.

8 Chemins - Ensembles connexes par arcs - Homotopies

Définition 3.5.
Soit $(X,\ \mathcal{T})$ un espace topologique et $I = [0,\ 1]$ (int. unité).. On appelle chemin allant d'un point $a \in X$ à $b \in X$, toute application continue $f : I \to X$ telle que $f(0) = a,\ f(1) = b$. a est l'origine et b l'extrémité du chemin.

* chemin fermé : $f(0) = f(1) = p$

Exemple 3.10.
$\forall p \in X$ l'application constante $e_p : I \to X$ définie par $e_p(S) = p$ est continue ($\forall S \in I$) donc e_p est un chemin qu'on appelle le chemin constant en p.

Définition 3.6.
Un sous-ensemble $E \subset X$ (($X, \mathcal{T}$) espace topologique) est dit connexe par arcs si $\forall a,\ b \in X$, il existe un chemin $f : I \to X$ allant de a à b, appartenant à E : $f\,[I] \subset E$.

* Les sous-ensembles connexes par arcs maximaux de X appelés composantes connexes par arcs constituent une partition de X.

Théorème 3.8.
Les ensembles connexes par arcs sont connexes.

Attention ! La réciproque de ce théorème n'est pas vraie.

Définition 3.7.
Deux chemins $f : I \to X$ et $g : I \to X$ sont **homotopes** s'ils ont même origine p et extrémité q et si $\exists$ une application continue

$$\left\Vert \begin{array}{lll} H : I^2 & \to X \text{ tel que} & \\ H(s,\ 0) & = f(s) & H(0,\ t) = p \\ H(s,\ 1) & g(s) & H(1,\ t) = q \end{array} \right\rbrace \begin{array}{l} \Leftrightarrow H \text{ est une homotopie} \\ \Leftrightarrow H \text{ transforme continuellement } f \text{ en } g \end{array}$$

9 Espaces simplement connexes

Définition 3.8.
Un espace est dit simplement connexe si tout chemin fermé est homotope à 0 (on peut le déformer continument en un point).

Exemple 3.11 ($\mathbb{R}^2$). **a)** Disque ouvert $\Rightarrow$ simplement connexe
(v. domaines d'analycité)

b) Couronne $\Rightarrow$ non simplement connexe

Chapitre 4

TOPOLOGIE
IV
Convexité et applications

1 Définitions - Théorèmes - Critères

1 Ensembles convexes

Définition 4.1.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On dira que $A \subset E$ est une partie convexe de E si pour tout couple de points $(x,\ y)\in A \times A$, le segment de droite $\{x,\ y\}$ est contenu dans A.

Autrement dit :

A est une partie convexe de E si $\forall(x,\ y) \in A \times A$ et $\forall\lambda_1,\ \lambda_2 \in [0,\ 1]$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Le vecteur $\lambda_1 x + \lambda_2 y = z$ appartient aussi à A.

On dit aussi que A est un convexe.

Remarque 4.1.

a) D'après cette définition (a), ou (b), il résulte directement que E lui-même est un convexe.

b) L'ensemble B de la figure n'est pas convexe.

Exemple 4.1.

1) Tout segment est convexe.

2) $\mathbb{R}^n$ est convexe.

3) Tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{où } f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R})$$

$$(\text{application linéaire } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$$

$$(f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall j = 1,\ \dots,\ n) \text{ est un convexe de } \mathbb{R}^n.$$

4) Tous les demi-espaces $E_1,\ E_2 \subset \mathbb{R}^n$ définis par :

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ |f(x) \geq \alpha\} \\ E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ |f(x) \leq \alpha\} \end{array}\right\} f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}\right)$$

sont les convexes de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 4.2.
Exemples qu'on a étudiés au chapitre de l'optimisation par la méthode du "simplexe" (applications de l'algèbre à l'optimisation ; v. cours n°5) : les demi-plans de $\mathbb{R}^2$ des solutions réalisables vérifiant les contraintes (mt́hode géométrique).

5)

a) Tout simplexe de $\mathbb{R}^n$ défini par :
$S_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| x_i \geq 0\ \forall i = 1,\ \ldots\ n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

b) L'ensemble X de solutions réalisables d'un problème d'optimisation en programmation linéaire («simplexe» forme standard)

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \ |Ax = b\ x_i \geq 0\ \forall i = 1,\ \ldots,\ n\}$$

(avec $A \in \mathcal{M}_R(m,\ n),\ b \in \mathbb{R}^m$ donnés) est un convexe dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 4.3.
Comme pour la remarque précédente, exemple : les régions admissibles de $\mathbb{R}^2$ solutions des problèmes d'optimisation par la méthode géométrique

6) L'intérieur d'une ellipse dans $\mathbb{R}^2$, est un convexe.

7) Soit E dans un espace vectoriel. Soit B une partie de E. L'ensemble A des barycentres de points de B affectés de masses ≥ 0 est la plus petite partie de E contenant B. On l'appelle enveloppe convexe de B.

On vérifie le :

Théorème 4.1.
L'intersection d'un nombre fini quelconque d'ensembles convexes est convexe :

$$\forall i = 1,\ \ldots,\ n,\ A_i \textit{ convexe } \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \textit{ convexe}$$

2 Fonctions convexes (A) : définies sur $\mathbb{R}$

Définition 4.2. Soit $I = [a,\ b] \subset \mathbb{R}$ et soit l'application numérique $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si pout tout point $M(x) = (x,\ f(x))$ du graphe G_f de f avec $x \in [x_1,\ x_2]$, $M(x)$ est au-dessous du segment $\{M(x_1),\ M(x_2)\}$

Une définition équivalente est donnée par :

Définition 4.3.

$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout couple $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ de nombres réels positifs avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ on a $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$

Autrement dit : l'image du barycentre est inférieure ou égale au barycentre des images.

Autrement :

$$\forall t \in [0,\ 1]\ \ f\left(tx_1 + (1-t)\,x_2\right) \leq tf\left(x_1\right) + (1-t)\,f\left(x_2\right)$$

On vérifie facilement le théorème suivant, qui souvent est utilisé par certaines références, comme définition de la convexité d'une fonction.

Théorème 4.2.

On considère une fonction numérique $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $A(f)$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ qui se trouvent au-dessus du graphe G de f $(A\,(f) \equiv$ épigraphe de $f)$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *f est convexe*

b) *l'épigraphe de f, $A\,(f)$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.*

Remarque 4.4.

En remplaçant les inégalités des définitions ci-dessus par des inégalités strictes on obtient les définitions analogiques des fonctions strictement convexes.

Exemple 4.2 (Fonctions numériques $f : I \to \mathbb{R}$ convexes $(I \subset \mathbb{R})$)**.**

1) Toute fonction linéaire ou affine, est une fonction convexe. (Son épigraphe $A\,(f)$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$) car c'est un demi-espace.

2) La fonction valeur absolue ; $f : x \to |x|$ est une fonction convexe.

3) La fonction exponentielle $f : x \to e^x$ est une fonction convexe.

Définition 4.4 (Enveloppe supérieure)**.**

On appelle enveloppe supérieure, f (resp. enveloppe inférieure) d'une famille de fonctions $\{f_i\}_{i\in J}$ et on note $\sup\limits_{i\in J}\{f_i\} = f$ $\left(\text{resp } \inf\limits_{i\in J}\{f_i\} = f\right)$ la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E f(x) = \sup_{i\in J} f_i\,(x)\ \left(\text{resp } f\,(x) = \inf_{i\in J} f_i\,(x)\right)$$

Le théorème suivant exprime la conservation de la convexité des fonctions sous certaines opérations.

Théorème 4.3 (Opérations et convexité)**.**

i) *Toute combinaison linéaire de fonctions convexes (à coefficients positifs) est une fonction convexe $\Leftrightarrow$ f_i convexe $\forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\ \Rightarrow f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i\ \ (a_i \geq)$ est convexe.*

ii) *Toute limite simple de fonctions convexes est une fonction convexe* $\Leftrightarrow$ *si* $\{f_n\}_{n\in N}$ *avec* f_{n-} *convexe* ($\forall n$)*, converge simplement sur* $I \subset \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *convexe.*

iii) *Toute enveloppe supérieure finie de fonctions convexes est convexe* $\Leftrightarrow$ $\{f_i\}_{i\in J}$ *avec* f_i *convexe* $\sup\limits_{i\in J}\{f_i\} = f$ *convexe.*

iv) *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe avec* $f(\Omega) \to I \subset \mathbb{R}$ *et soit* $g : I \to \mathbb{R}$, *une fonction convexe croissante alors la fonction composée :*

$$g \circ f : \Omega \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ est convexe.}$$

Définition 4.5 (Fonctions concaves)**.**
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave si la fonction $-f$ est convexe.

* Autrement dit, ce n'est plus l'épigraphe $A(f)$ qui est convexe mais l'ensemble $\mathcal{C}A(f)$ qui est convexe.

Remarque 4.5.
Un théorème analogue au 4.3 est valable.

Exemple 4.3 (de fonctions concaves)**.**
Les fonctions : $f_1 = -x^2,\ f_2(x) = \ln x$ sont concaves.

3 Continuité et dérivabilité des fonctions numériques convexes

Par le théorème suivant des propriétés de continuité et différentiabilité sont présentées pour les fonctions convexes, qui sont très utiles pour les applications et la déduction des critères de convexité (4).

Théorème 4.4.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe ($I =]a,\ b[$) alors :

i) $\Leftrightarrow$ la fonction $p(x,\ y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$, $x \neq y$ est une fonction croissante par rapport à chacune des variables x et y.

ii) f concave aussi $\Leftrightarrow$ f est une fonction affine.

iii) Pour tout $x \in I$ les dérivées à droite $f'_d(x)$ et à gauche $f'_g(x)$ existent et si $x < y$:

$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$

iv) Les dérivées f'_g et f'_d sont deux fonctions croissantes et f n'est pas dérivable seulement en un nombre de points de I au plus dénombrable.

Conséquence directe :

Théorème 4.5.
Si f est convexe alors

i) En tout point $M(A)$ de G_f on peut tracer une droite d'appui (au moins)

ii) Si f est dérivable en A alors la droite d'appui est unique : c'est la tangente en A.

4 Critères de convexité (1)(fonctions $f : I \to \mathbb{R}$)

Théorème 4.6.

i) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ finie, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est convexe

b) f continue et les dérivées $f'_d,\ f'_g$ existent (pour tout $x \in I \backslash D$ où $D =$ partie de I au plus dénombrable) et sont croissantes.

ii) Soit f convexe et deux fois dérivable $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

Théorème 4.7 (Condition suffisante de convexité)**.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ finie et continue sur I.
$\Rightarrow f$ est convexe si pour tout $(a,\ b) \in I^2$.
$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$

5 Fonctions convexes (B) Généralisation de la convexité pour les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ (E espace vectoriel $\mathbb{R}$)

Définition 4.6.
f est convexe si $A_E(f) \subset E \times \mathbb{R}$ l'épigraphe de la fonction f est convexe.

6 Critères de convexité (2) - Cas général

Théorème 4.8.

i) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ avec X partie convexe d'un espace vectoriel E alors on a l'équivalence f convexe $\Leftrightarrow f_{/I}$ (la restriction de f à tout segment de X) est une fonction convexe.

ii) $f : X \to \mathbb{R}$ (X cône de sommet de 0), fonction positivement homogène ($\Leftrightarrow \forall \left[x \in X,\ \lambda \geq 0\right]\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$) alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f convexe

b) $\forall x_1,\ x_2 \in X\ f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$

Définition 4.7.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable

a) On appelle gradient de f noté $\overrightarrow{\bigtriangledown} f \in \mathbb{R}^n$ (ou gradient f) l'opérateur différentiel-vecteur de $\mathbb{R}^n$: $\overrightarrow{\bigtriangledown} f = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right\}_{i=1,\ \ldots,\ n}$

b) On appelle hessien de f noté $\bigtriangledown^2 f$, l'opérateur différentiel-matrice $\in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ \bigtriangledown^2 f(x) \equiv H_{ij} = \left\{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{\substack{i=1,\ \ldots,\ n \\ j=1,\ \ldots,\ n}}$

7 Critères de convexité (suite) dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 4.9.

Soit X convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}$. Si f est contiûment différentiable alors les conditions i) et ii) sont équivaalentes.

Si f est deux fois continûment différentiable alors les conditions i), ii) et iii) sont équivalentes.

i) f est convexe

ii) $\forall x,\ y \in X,\ \bigtriangledown f^T(x).(y-x) \leq f(y) - f(x)$

iii) $\forall x \in X$ le hessien $\bigtriangledown^2 f(x)$ est une matrice semi-définie positive, autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ \alpha^T \bigtriangledown^2 f\alpha = \sum_{i,\ j} \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0$$

Corollaire 4.1.

Toute forme quadratique semi-définie positive est une fonction convexe.

8 Convexité - Connexité

Théorème 4.10.

Toute partie convexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe.

* Attention ! la réciproque n'est pas vraie.

2 Applications - Convexité et optimisation

La première partie de ce chapitre concerne des résultats généraux des problèmes d'optimisation dans les ensembles convexes.

1 Propriétés générales

Définition 4.8.

Soit f une fonction numérique convexe définie sur un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe et soient $g_{i=1,\ \ldots,\ n}$ des fonctions convexes. On appelle programme convexe le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{avec } g_i(x) \leq 0\ \forall i = 1,\ \ldots,\ m\ x \in S \subset R^n \end{cases}$$

Théorème 4.11.

Pour un programme convexe : tout optimum local est un optimum global.

Théorème 4.12.

Soit U une partie convexe d'un espace vectoriel normé V. Une application $J : U \subset V \to \mathbb{R}$ strictement convexe admet au plus un minimum (unicité de minimum).

2

Dans cette seconde partie du chapitre, on étudie les méthodes d'optimisation sans contraintes, et avec contraintes, reliées à la proprifé de convexité.

La méthode du simplexe cours n°5 comme application a déjà été traitée.

Optimisation sans contrainte

Conditions nécessaires (1^{er} ordre)

Définition 4.9.
On appelle point critique ou point stationnaire, tout point où le gradient grad $f \equiv \overline{\bigtriangledown} f$ est nul.

Exemple 4.4.

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\overline{\bigtriangledown} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2y\right)$$
$$\text{et } \overline{\bigtriangledown} f = 0 \Leftrightarrow 2x = 0,\ 2y = 0, 2z = 0$$

le point $x = y = z = 0$ est un point critique pour f

Théorème 4.13.
Soit f une fonction continue et différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $\overline{x} \in U$ est un extremum pour la fonction alors

$$\overline{\bigtriangledown} f\ (\overline{x}) = 0\ (\Leftrightarrow \overline{x} \text{ point critique pour } f)$$

Définition 4.10.
On appelle point selle tout point critique pour une fonction qui n'est ni un maximum ni un minimum.

Conditions suffisantes

Théorème 4.14.
Soit f une fonction localement convexe (resp. concave) au voisinage de x, point stationnaire de f. Alors x est un minimum (resp. maximum) local pour f.

Théorème 4.15.
Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et deux fois (au moins) continûment différentiable. Soit $H_f \equiv \bigtriangledown^2 f = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right]_{i,\ j}$ la matrice (Hessien) de toutes les dérivées secondes de f (matrices symétriques).

Soit $\overline{x}$, un point critique de f alors :

i) Si la matrice $\left|\bigtriangledown^2 f\right|_{\overline{x}}$ (ou la forme quadratique associée) est définie positive alors f est localement convexe en $\overline{x}$ et $\overline{x}$ est un minimum local pour f.

ii) Si $\left|\bigtriangledown^2 f\right|_{\overline{x}}$ (ou la forme quadratique associée) est définie négative alors f est localement concave et $\overline{x}$ est un maximum local pour f.

iii) Si $\left|\bigtriangledown^2 f\right|_{\overline{x}}$ (ou la forme quadratique) est non définie alors $\overline{x}$ est un point selle.

iv) Si $\left|\bigtriangledown^2 f\right|_{\overline{x}}$ (ou la forme quadratique associée) est semi-définie positive (ou négative) on n'a pas de conclusion, et une étude plus fine doit être réalisée.

Exemple 4.5.

$$f(x,\ y,\ z) = x^3 z + y^3 - 3x^2 y - 2z^2$$

On veut optimiser cette fonction (sur $\mathbb{R}^3$). Étapes :

a) $\overline{\nabla} f = 0 \Leftrightarrow$ trois points stationnaires

$$\overline{x_1} = (0,\ 0,\ 0);\ \overline{x_2} = (2,\ 2,\ 2);\ \overline{x_3} = (-2,\ 2,\ -2)$$

b) Le Hessien : $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 6xz - 6y & -6x & 3x^2 \\ -6x & 6y & 0 \\ 3x^2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

On vérifie la positivité de (ou de la forme quadratique associée) pour chacun des 3 points critiques.

a) $H_{(0,\ 0,\ 0)} = \nabla^2 f(0,\ 0,\ 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow$ Forme quadratique associée

$Q(0,\ 0,\ 0) = -4z^2$. (rg $H_{(0,\ 0,\ 0)} < 3$).

Donc, la matrice $\left|\nabla^2 f\right|_{\overline{x_1}}$ (et sa forme quadratique associée) est semi-définie négative

$\Rightarrow$ On ne peut pas conclure une étude plus détaillée est nécessaire.

b) Pour $\overline{x_2} = [2,\ 2,\ 2]$, on obtient :

$$\nabla^2 f\,[2,\ 2,\ 2] = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 12 \\ -12 & 12 & 0 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\nabla^2 f\,[2,\ 2,\ 2] = 12 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

On réduit la matrice (diagonalisation) à une forme canonique par échelonnage, on obtient successivement :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

On appelle cette dernière matrice, forme réduite à la diagonale. Donc la forme canonique de la forme quadratique associée est :

$Q(2,\ 2,\ 2) = 12\left(X^2 - Y^2 + Z^2\right) \Rightarrow$ Forme non définie (positive ou négative)

$\Rightarrow (2,\ 2,\ 2)$ Point selle

c) Pour le point $\overline{x_3} = (-2,\ 2,\ -2)$

$$\bigtriangledown^2 f\,[-2,\ 2, 2] = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 0 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Réduction par échelonnage :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\dfrac{4}{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\dfrac{4}{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\dfrac{4}{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

donc $Q(-2,\ 2,\ -2) = 12\left[X^2 + Y^2 - Z^2\right]$ (forme canonique) et la matrice $H_{(-2,\ 2,\ -2)}$ (et la forme quadratique associée) n'est pas définie $\Rightarrow$ le point $(-2,\ 2,\ -2)$ est un point selle pour f (pas un extremum).

Théorème 4.16 (Cas particulier sur $\mathbb{R}^2$)**.**

Pour $n = 2$, les résultats du théorème 4.15 se résument comme il suit :

Soit f définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$ deux fois continûment dérivable et soit $Q(x,\ y)$ la forme quadratique associée à la matrice Hessien : $\bigtriangledown^2 f$. Soit $(\overline{x},\ \overline{y})$ un point critique de f et

$$p = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(\overline{x},\ \overline{y})},\ q = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(\overline{x},\ \overline{y})},\ r = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(\overline{x},\ \overline{y})},\ \bigtriangledown^2 f(\overline{x},\ \overline{y}) = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}$$

Soit Q la fonction quadratique associée $\left(p \neq 0 \Rightarrow\ pQ = p^2\left(x + r\dfrac{y}{p}\right)^2 + y^2\left(pq - r^2\right)\right)$

$pq - r^2$	p	q	$(\overline{x},\ \overline{y})$	
$+$	$+$	$+$	minimum (convexité)	$\Rightarrow Q\left(\overline{x},\ \overline{y}\right)$ définition positive
$+$	$-$	$-$	maximum (concavité)	$\Rightarrow Q\left(\overline{x},\ \overline{y}\right)$ définition négative
0	quelconque	quelconque	pas de conclusion	$\Rightarrow Q\left(\overline{x},\ \overline{y}\right)$ définition semi-définie (positive ou négative)
$-$	quelconque	quelconque	point selle	$\Rightarrow Q\left(\overline{x},\ \overline{y}\right)$ définition indéfinie

Exemple 4.6.

Considérons la fonction : $f(x,\ y) = x^2 + y^2$.

Le point critique $(\overline{x},\ \overline{y}) = (0,\ 0)$ est un minimum pour f car f est convexe : vérification directe et vérification par le tableau précédent que :

$$Q(0,\ 0) = 2\left[X^2 + Y^2\right] > 0 \Rightarrow \text{ définie positive}$$

Optimisation sous contraintes (d'égalité)

On peut utiliser 2 méthodes pour résoudre les problèmes du type :

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\text{Minimiser } f(x)\ x \in I\\ \text{avec } g(x)=0\end{array}\right\}$$

Première méthode

On résout la contrainte par rapport à une des variables et ensuite on substitue son expression dans la fonction $f(x)$. On constitue ensuite par la résolution du nouveau problème sans contraintes.

Exemple 4.7.

On considère le problème d'optimisation :

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\text{Minimiser } \left[f(x,\ y,\ z)=x^2+\dfrac{y^2}{4}+z^2\right]\\ \text{avec la contrainte } g(z,\ y)=z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{array}\right\}$$

On explicite z (ou y) par rapport à l'autre variable :

$$z=y\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow f(x,\ y,\ z(y))=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{3}{4}y^2$$

$$\text{ou } \min f(x,\ y)=x^2+y^2$$

et on revient à l'exemple précédent sans contraintes.
$\Rightarrow (0,\ 0)$ minimum de $f(x,\ y,\ z)$ avec $g=0$.

Deuxième méthode : Multiplicateurs de Lagrange

Exemple 4.8.

a) On considère le problème :

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\text{Minimiser } f(x)\ x \in I \subset \mathbb{R}^n\\ \text{avec } g_i(x)=0\ i=1,\ \ldots,\ k\end{array}\right.$$

On introduit le Lagrangien généralisé du problème (P) par la fonction L suivante définie sur $\mathbb{R}^{n+k}$ par :

$$L(x,\ \lambda)=L(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k)=f(x)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x) \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } i=1,\ \ldots,\ k$$

les multiplicateurs de Lagrange.

b) On appelle point col du Lagrangien L, tout point $(\overline{x},\ \overline{\lambda}) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{ll}L\left(\overline{x},\ \overline{\lambda}\right)\leq L\left(x,\ \overline{\lambda}\right) & \text{(minimum en } x \text{ à } \overline{\lambda} \text{ fixé)}\\ L\left(\overline{x},\ \lambda\right)\leq L\left(\overline{x},\ \overline{\lambda}\right) & \text{(maximum en } \lambda \text{ à } \overline{x} \text{ fixé)}\end{array}\right.$$

On vérifie le :

Théorème 4.17.

Soit $L(x,\ \lambda)$ le Lagrangien généralisé de (P) alors :

i) Le système des conditions nécessaires pour l'existence d'une solution $\overline{x}$ à (P) est donné par :

$$\overline{\bigtriangledown} L(\overline{x},\ \overline{\lambda}) = 0 \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\overline{x},\ \overline{\lambda} = g_i(\overline{x}) = 0\ i = 1,\ \dots,\ k) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}\left(\overline{x},\ \overline{\lambda}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\overline{x}) = 0 \end{cases}$$

ii) Si $(\overline{x},\ \overline{\lambda})$ est un point col de $L(x,\ \lambda)$ alors $\overline{x}$ est solution du problème (P).

Exemple 4.9.

Soit le problème :

$$\text{optimiser} \begin{cases} f(x,\ y,\ z) = z \\ \text{avec} \begin{array}{l} g_1(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ g_2(x,\ y,\ z) = x + y + z = 0 \end{array} \end{cases}$$ Le Lagrangien généralisé s'écrit :

$$L(x,\ y,\ z) = z + \lambda_1 \left(x^2 + y^2 - 2\right) + \lambda_2 \left(x + y + z\right) \ \left(\forall x,\ y,\ z,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^5\right)$$

i) Conditions nécessaires : gradient $L = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial L}{\partial x} & = 2\lambda_1 x + \lambda_2 & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} & = 2\lambda_1 y + \lambda_2 & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} & = 1 + \lambda_2 & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} & = x^2 + y^2 - 2 & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} & = x + y + z & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{solution } M_1 = \left\{A(-1,\ -1,\ 2);\ \lambda_1 = -\dfrac{1}{2},\ \lambda_2 = -1\right\} \\ \text{solution } M_2 = \left\{B(1,\ 1,\ -2);\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2},\ \lambda_2 = -1\right\} \end{array}$$

ii) On fixe $\lambda_1,\ \lambda_2$

a) $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2},\ \lambda_2 = -1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L\left(x,\ y,\ z,\ -\frac{1}{2} - 1\right) & = z - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 - 2\right) - (x + y + z) \\ & = -\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + 1 - x - y \end{aligned}$$

Il s'agit d'une fonction concave : ceci résulte ou bien du fait qu'on a une combinaison linéaire de 2 fonctions concaves. (attention $1 - x - y$ convexe et concave) ou bien du fait que

$$h(x,\ y) = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1 + x + y$$

vérifie : $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial h}{\partial x} = x + 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = y + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,\ -1) \text{ point critique et}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & = 1 & = p > 0 \\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} & = 1 & = q > 0 \\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & = 0 & \end{array}\right\} pq - r^2 > 0$$

$\rightarrow h$ convexe $\Rightarrow (-h$ concave)
$\Rightarrow (-1,\ -1,\ 2)$ maximum pour f avec $g_i = 0\ i = 1,\ 2$

b) De même pour $\lambda_1 = \dfrac{1}{2},\ \lambda_2 = -1$
$\Rightarrow L\left(x,\ y,\ z,\ \dfrac{1}{2} - 1\right) = \dfrac{x^2 + y^2}{2} - 1 - (x + y)$ convexe
$\Rightarrow (1,\ 1,\ -2)$ minimum pour f.