

MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR  
ANALYSE  
II  
TOPOLOGIE (I-II)

Support du cours donné en 1<sup>re</sup> année  
par Marietta Manolessou  
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010



# Table des matières

	<b>ANALYSE II</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>TOPOLOGIE I.</b>	
	<b>Espaces Topologiques</b>	<b>1</b>
1	Espaces topologiques - Généralités . . . . .	1
1	1 Topologie - Ouverts - Voisinsages . . . . .	1
2	2 Fermés - Fermeture (Adhérence) . . . . .	3
3	3 Points d'accumulation (Points limites) . . . . .	4
4	4 Intérieur - Frontière . . . . .	5
5	5 Sous-ensemble $A$ dense dans $E$ . . . . .	6
2	2 Sous-espaces topologiques - Topologie produit . . . . .	7
1	1 Topologie induite . . . . .	7
2	2 Topologie produit . . . . .	7
3	3 Convergence . . . . .	8
1	1 Suites convergentes dans $(E, \mathcal{T})$ . . . . .	8
2	2 Espaces topologiques séparés (ou de Hausdorff) . . . . .	9
4	4 Continuité - Homéomorphismes . . . . .	9
1	1 Continuité . . . . .	9
2	2 Homéomorphismes (ou Homéomorphie) . . . . .	10
<b>2</b>	<b>TOPOLOGIE II</b>	
	<b>Espaces métriques</b>	<b>13</b>
1	1 Espaces métriques - Distances - Boules . . . . .	13
2	2 Exemples d'espaces métriques et de distances . . . . .	14
3	3 Topologie des espaces métriques . . . . .	16
4	4 Espaces vectoriels normés $\Rightarrow$ espaces métriques . . . . .	18
5	5 Isométries . . . . .	18
6	6 Suites convergentes dans les espaces métriques . . . . .	19
7	7 Caractérisation des fermés dans un espace métrique . . . . .	20
8	8 Propriétés des suites convergentes dans $(E, d)$ . . . . .	20
9	9 Continuité des applications dans les espaces métriques . . . . .	21
1	1 Continuité . . . . .	21
2	2 Continuité uniforme . . . . .	21
10	10 Suites de Cauchy dans les espaces métriques - Espaces complets . . . . .	22
11	11 Applications. Théorème du point fixe . . . . .	23

12	Convergence uniforme et espace métrique - Conservation de la continuité par la convergence uniforme . . . . .	23
----	---	----

# **Table des figures**



# Chapitre 1

## TOPOLOGIE I. Espaces Topologiques

### 1 Espaces topologiques - Généralités

#### 1 Topologie - Ouverts - Voisinages

##### Définition 1.1.

Un ensemble  $E$  a une structure d'un espace topologique si on a défini un ensemble  $\mathcal{T}$  de parties de  $E$ ,  $\mathcal{O}_i \subset E$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) appelées les ouverts de  $E$ , vérifiant les propriétés suivantes ( $\mathcal{O}$ ) :

$\mathcal{O}.1.$   $E$  et  $\emptyset$  appartiennent à  $\mathcal{T}$

$\mathcal{O}.2.$  Toute réunion d'ouverts est un ouvert :  $\bigcup_i \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_j$

$\mathcal{O}.3.$  Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert  $\bigcap_{j=1, \dots, k} \mathcal{O}_j = \mathcal{O}_i$

On dit aussi que  $\mathcal{T}$  avec  $\mathcal{O}.1.$ ,  $\mathcal{O}.2.$ ,  $\mathcal{O}.3.$  définit une topologie sur  $E$  et le couple  $(E, \mathcal{T})$  désigne l'espace topologique.

##### Exemple 1.1 (Topologie usuelle de $\mathbb{R}$ ).

Considérons l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels. Pour tout sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}$ , on appelle point intérieur de  $A$ , tout point  $p \in A$  tel qu'il existe un intervalle ouvert  $]a, b[ \subset A$  avec  $p \in ]a, b[$ . Si chacun des points de  $A$  est un point intérieur alors  $A$  définit un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble  $\mathcal{U}$  des ouverts de  $\mathbb{R}$  défini de cette manière est une topologie sur  $\mathbb{R}$  appelée la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

Attention ! Tout ouvert de  $\mathbb{R}$  n'est pas un intervalle ouvert.

##### Exemple 1.2.

Soient, l'ensemble  $X = \{a, b, c, d, e\}$  et les familles de parties de  $X$  suivantes :

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

$$\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$$

On vérifie que :

$\mathcal{T}_1$  est une topologie sur  $X$

$\mathcal{T}_2$  n'est pas une topologie sur  $X$ , car :

$$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \mathcal{T}_2 \Rightarrow \text{l'axiome } (\mathcal{O}.2.) \text{ n'est pas vérifié.}$$

$\mathcal{T}_3$  n'est pas une topologie sur  $X$  car l'axiome ( $\mathcal{O}.3.$ ) n'est pas vérifié :

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\} \notin \mathcal{T}_3$$

**Exemple 1.3** (Topologie discrète).

On désigne par  $\mathcal{D}$  l'ensemble de toutes les parties de  $X$ . On vérifie facilement que  $\mathcal{D}$  est une topologie sur  $X$ . On l'appelle la topologie discrète.  $(X, \mathcal{D})$  est appelé espace topologique discret ou simplement espace discret.

**Exemple 1.4** (Topologie grossière).

La famille  $\mathcal{S} = \{X, \emptyset\}$  constituée par  $X$  et  $\emptyset$  seuls est une topologie sur  $X$  appelée topologie grossière, et  $(X, \mathcal{S})$  est appelé espace topologique grossier ou simplement espace grossier.

**Définition 1.2** (Définition d'une topologie par les voisinages  $\mathcal{V}$ ).

On dit que l'ensemble  $E$  est un espace topologique si pour tout  $a \in E$ , il existe un ensemble  $\mathcal{V}(a)$  de parties de  $E$  appelées voisinages de  $a$  tel que les propriétés suivantes  $(\mathcal{V}_i)$  soient vérifiées :

( $\mathcal{V}$  1) Tout voisinage de  $a$  contient  $a$ .

( $\mathcal{V}$  2) Toute intersection finie de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .

( $\mathcal{V}$  3) Toute partie de  $E$  contenant un voisinage  $\mathcal{V}(a)$  est un voisinage de  $a$ .

( $\mathcal{V}$  4) Si  $\mathcal{V}$  est un voisinage de  $a$ , il contient un voisinage  $(\mathcal{V}_1)$  de  $a$  tel que  $\mathcal{V}$  soit voisinage de tous les points de  $(\mathcal{V}_1)$ .

**Théorème 1.1** (Equivalence  $(\mathcal{V}) \Leftrightarrow (\mathcal{O})$ ).

Il y a équivalence entre la définition d'une topologie par les axiomes  $(\mathcal{V})$  et la définition d'une topologie par les axiomes  $(\mathcal{O})$ .

**Remarque 1.1.**

a) Quand les axiomes  $(\mathcal{O})$  sont vérifiés (c'est à dire les ouverts  $\mathcal{O}_i$  sont donnés) le passage  $(\mathcal{O}) \Rightarrow (\mathcal{V})$  se fait par la définition suivante (du voisinage) :

**Définition 1.3.** Soit  $(E, \mathcal{T})$ , un espace topologique, on appelle voisinage de  $a \in E$ , toute partie de  $A$  contenant un ouvert dans  $\mathcal{T}$  contenant  $a$ .

b) Quand les axiomes  $(\mathcal{V})$  sont vérifiés, le passage  $(\mathcal{V}) \Rightarrow (\mathcal{O})$  se fait par la définition suivante (de l'ouvert) :

**Définition 1.4.** Soit  $(E, \mathcal{V}(a))$ ,  $a \in E$ , on appelle ouvert  $\mathcal{O}_i$  de  $E$ , toute partie de  $E$  qui est voisinage de chacun de ses points.



## 2 Fermés - Fermeture (Adhérence)

**Définition 1.5.** On appelle fermé  $\mathcal{F}_i$  d'un espace topologique  $(E, \mathcal{T})$  le complémentaire d'un ouvert :  $\mathcal{F}_i = \mathcal{O}_i^c$ .

L'ensemble  $\mathcal{F}$  des fermés vérifie :

### Théorème 1.2.

Soit  $(E, \mathcal{T})$ , un espace topologique, alors :

( $\mathcal{F}$ .1.)  $E$  et  $\emptyset$  sont des fermés.

( $\mathcal{F}$ .2.) Toute réunion finie de fermés est un fermé.

( $\mathcal{F}$ .3.) Toute intersection de fermés est un fermé.

### Remarque 1.2.

Un ensemble peut être ni ouvert ni fermé, par exemple :

Le cas de l'ensemble  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  qui n'est ni ouvert ni fermé pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

### Exemple 1.5.

Soit  $(X, \mathcal{T}_1)$  l'espace topologique de l'exemple (1.2) avec

$$X = \{a, b, c, d, e\} \text{ et } \mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

Les fermés de  $X$  sont :  $F = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$

\* L'ensemble  $\{b, c, d, e\}$  est à la fois ouvert et fermé.

\*  $\{a, b\}$  n'est ni ouvert ni fermé.

### Définition 1.6 (Fermeture de $A \subset E$ ).

On appelle fermeture de  $A$  (notation  $\overline{A}$ ), l'intersection de tous les fermés contenant  $A$  :

$$\overline{A} = \bigcap \mathcal{F}_i \quad \text{avec } A \subseteq \mathcal{F}_i; \quad \mathcal{F}_i \in \mathcal{F}$$

### Remarque 1.3.

$\overline{A}$  est une partie de  $E$  contenant  $A$  et d'après  $\mathcal{F}$ .3. du théorème 1.2, c'est un fermé. Autrement dit, on a :

### Théorème 1.3.

1. Si  $\mathcal{F}$  est un fermé contenant  $A$  alors :  $A \subset \overline{A} \subset \mathcal{F}$  (ou  $\overline{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ ).
2.  $A$  est fermé si et seulement si  $A = \overline{A}$ .

### Exemple 1.6.

Considérons encore l'exemple 1.5 où on aurait déterminé les fermés de  $(X, \mathcal{T}_1)$ . On a :  $\{\overline{b}\} = \{b, e\}$ ,  $\{\overline{a, c}\} = X$ ,  $\{\overline{b, d}\} = \{b, c, d, e\}$ .

### 3 Points d'accumulation (Points limites)

On notera par la suite  $(E, \mathcal{T})$  un espace topologique.

#### Définition 1.7.

$x$  est un point adhérent à  $A \subset E$  si tout voisinage  $\mathcal{V}(x)$  contient au moins un point de  $A$ .

#### Remarque 1.4.

En particulier, tout point de  $A$  est un point adhérent de  $A \subset E$  à cause de  $(\mathcal{V} 1)$  et on a :

#### Théorème 1.4.

- i) La fermeture  $\bar{A}$  d'une partie  $A$  d'un espace topologique est l'ensemble des points adhérents à  $A$ . (On appelle aussi  $\bar{A}$  l'adhérence).
- ii) Une partie  $A$  de  $(E, \mathcal{T})$  est fermée si et seulement si elle contient tous ses points adhérents.

#### Définition 1.8.

On dit que  $x \in E$  est un **point d'accumulation** de  $A$  (ou point limite de  $A$ ) si tout voisinage  $\mathcal{V}(x)$  contient un point de  $A$  différent de  $x$ . On appelle **ensemble dérivé**, noté  $A'$  l'ensemble des points d'accumulation de  $A$ .

#### Remarque 1.5.

- a) Un point adhérent qui n'est pas un point de  $A$  est un point d'accumulation de  $A$  (Pourquoi ?).
- b) Un point  $a \in A$  qui n'est pas un point d'accumulation de  $A$  est appelé **point isolé** de  $A$ .

#### Exemple 1.7.

Soit encore l'exemple 1.5  $(X, \mathcal{T}_1)$ . La partie  $A = \{a, b, c\}$  de  $X$  a comme points d'accumulation  $b, d, e$ . Par contre, les points  $a$  et  $c$  sont des points isolés de  $A$ .

#### Pourquoi ?

Donc :  $A' = \{d, b, e\}$ .

**Exemple 1.8.** Soit  $(X, \mathcal{S})$ , un espace topologique grossier,  $\forall p \in X, p$  est un point d'accumulation de toute partie  $A \subset X$  excepté  $\emptyset$ , et le singleton  $\{p\}$ , donc  $\forall A \subset X$ , on a :

$$A' = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \{p\}^c = X - \{p\} & \text{si } A = \{p\} \\ X & \text{si } A \text{ contient 2 points ou plus} \end{cases}$$

On vérifie facilement le :

#### Théorème 1.5.

- i) La fermeture (ou adhérence) de  $A, \bar{A}$ , est la réunion de  $A$  et  $A' : \bar{A} = A \cup A'$ .
- ii) Un ensemble  $A \subset E$  est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation.

#### Exemple 1.9.

On sait que tout nombre réel est un point limite (ou d'accumulation) pour l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des rationnels. Donc  $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$  et  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ .

#### 4 Intérieur - Frontière

On suppose toujours que  $(E, \mathcal{T})$  est un espace topologique et  $A \subset E$ .

##### Définition 1.9.

On appelle *intérieur* de  $A$  (noté  $\overset{\circ}{A}$ ) la réunion de tous les ouverts contenus dans  $A$  :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \mathcal{O} \quad \text{avec } \mathcal{O} \subseteq A, \quad \mathcal{O} \in \mathcal{T}$$

\* on note aussi  $\overset{\circ}{A} = \text{Int}(A)$

##### Remarque 1.6.

On voit que  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

##### Définition 1.10.

- a) On dit que  $x$  est un **point intérieur** de  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $x$ .
- b) On dit que  $y$  est un **point extérieur** de  $A$  s'il est point intérieur de  $A^c$  ( $A^c$  complémentaire de  $A$ ).
- c) On appelle *extérieur* de  $A$ , l'intérieur de  $A^c$ .

On vérifie le :

##### Théorème 1.6.

- i)  $\overset{\circ}{A}$  est l'ensemble de tous les points intérieurs de  $A$ .
- ii)  $A$  est un ouvert si et seulement si  $A = \overset{\circ}{A}$ .

##### Définition 1.11.

- a) On appelle **frontière** de  $A$  l'ensemble des points qui n'appartiennent ni à l'intérieur ni à l'extérieur de  $A$ . Notation :  $\partial A$
- b)  $x$  est un point frontière si tout  $\mathcal{V}(x)$  contient un point de  $A$  et un point de  $A^c$ .

On vérifie le :

##### Théorème 1.7.

- i)  $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$
- ii) La frontière  $\partial A$  est l'ensemble des points frontières.
- iii) Pour tout sous-ensemble  $A \subset E$ , l'espace topologique  $E$  se décompose en trois parties disjointes :

$$E = \overset{\circ}{A} \cup \text{Ext}(A) \cup \partial A$$

##### Exemple 1.10.

Soit  $[\mathbb{R}, \mathcal{U}]$  (topologie usuelle) et soient les intervalles  $[a, b]$ ,  $]a, b]$  et  $[a, b[$  dont les extrémités sont  $a$  et  $b$ . L'intérieur de chacun de ces intervalles est l'intervalle ouvert  $]a, b[$  et la frontière de chacun de ces intervalles est l'ensemble des extrémités, c'est à dire  $\{a, b\}$

**(Pourquoi ?)**

**Exemple 1.11.**

On considère encore (!!) l'exemple 1.5 où  $X = \{a, b, c, d, e\}$  et

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

et soit  $A = \{b, c, d\}$ .

Les points  $c, d$  sont chacun des points intérieurs de  $A$  puisque  $c, d \in \{c, d\} \subset A$  avec  $\{c, d\}$  un ouvert de  $\mathcal{T}_1$ .

Le point  $b$  n'est pas un point intérieur de  $A$ ; ainsi  $\overset{\circ}{A} = \{c, d\}$ . Seul le point  $a \in X$  est extérieur à  $A$ , c'est à dire intérieur au complémentaire de  $A$ ,  $A^c = \{a, e\}$ .

Donc  $\text{Int}\{A^c\} = \{a\}$ . Par conséquent  $\partial A = \{b, e\}$

**Exemple 1.12.**

Considérons l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des rationnels. Puisque tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est formé à la fois de points rationnels et irrationnels il n'y a pas de points intérieurs ou extérieurs à  $\mathbb{Q}$  ainsi :

$$\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset \text{ et } \text{Int}(\mathbb{Q}^c) = \emptyset \rightarrow \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

**5 Sous-ensemble  $A$  dense dans  $E$** **Définition 1.12.**

- a)  $A$  est dense dans  $E$  (ou partout dense) si  $\overline{A} = E$   
 b)  $A$  est nulle part dense (dans  $E$ ) si sa fermeture ne contient aucun ouvert (différent du vide), c'est à dire :

$$\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$$

- c) Un espace  $(E, \mathcal{T})$  est **séparable** s'il existe une partie  $A \subset E$  dénombrable et dense dans  $E$ .

**Exemple 1.13.**

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  donc  $\mathbb{Q}$  dense dans  $\mathbb{R}$ ; comme en plus  $\mathbb{Q}$  est dénombrable

$$\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$$

est un espace topologique séparable.

## 2 Sous-espaces topologiques - Topologie produit

**Rappel de notations :**  $(E, \mathcal{T})$  désigne un espace topologique  
 $\mathcal{V}(x)$  est le voisinage d'un  $x \in E$   
 $\mathcal{O}_i$  les ouverts de  $\mathcal{T}$  (la topologie)

### 1 Topologie induite

#### Définition 1.13.

Pour une partie  $P \subset E$ , on définit la topologie induite sur  $P$ , par  $(E, \mathcal{T})$ , en prenant comme ouverts les intersections des ouverts  $\mathcal{O}_i$  de  $E$  avec  $P$ . Donc si  $\mathcal{T}_P$  désigne cette topologie :

$$\mathcal{T}_P = \{\mathcal{O}_{P_i}\} \text{ où } \forall \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}, \mathcal{O}_{P(i)} = \mathcal{O}_i \cap P$$

et  $(P, \mathcal{T}_p)$  désigne le sous-espace topologique.

#### Exemple 1.14.

Considérons la topologie usuelle  $\mathcal{U}$  sur  $\mathbb{R}$  et la topologie induite  $\mathcal{U}_A$  sur l'intervalle fermé  $A = [3, 8]$ . L'intervalle semi-ouvert  $]3, 5[$  est ouvert pour la topologie induite sur  $A$ , c'est à dire un  $\mathcal{U}_A$  ouvert car :

$$]2, 5[ \text{ étant un ouvert de } (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \Rightarrow ]2, 5[ \cap A = ]3, 5[$$

**Remarque 1.7.** Cet exemple montre aussi qu'un ensemble peut être un ouvert relativement à un sous-espace, mais ni ouvert ni fermé dans l'espace tout entier.

### 2 Topologie produit

#### Définition 1.14.

Soient  $(E, \mathcal{T}_E)$  et  $(F, \mathcal{T}_F)$  deux espaces topologiques.

Sur l'espace produit  $E \times F$  on définit une topologie appelée la topologie produit en prenant, comme voisinages  $\mathcal{V}(e, f)$  d'un point  $(e, f) \in E \times F$  (avec  $e \in E, f \in F$ ), toutes les parties de  $E \times F$  contenant un ensemble  $\mathcal{V}(e) \times \mathcal{V}(f)$  où  $\mathcal{V}(e)$  est un voisinage de  $e \in E$  et  $\mathcal{V}(f)$  est un voisinage de  $f \in F$ .

Autrement dit chaque ouvert  $\mathcal{O}_{E \times F}$  de la topologie produit  $\mathcal{T}_{E \times F}$  contient un produit  $\mathcal{O}_E \times \mathcal{O}_F$  ( $\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F$  ouverts de  $E$  et de  $F$  respectivement).

La définition se généralise pour un produit quelconque fini d'espaces topologiques :

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n.$$

#### Exemple 1.15.

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on appelle "pavé" ouvert tout sous-ensemble produit d'intervalles ouverts  $]a_i, b_i[$  de  $\mathbb{R}$ . Donc la topologie produit de l'espace  $\underbrace{\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ facteurs}}$  est définie

à partir de ces pavés qui sont des ouverts de  $T_{\mathcal{R}^n} : \mathcal{O}_{\mathcal{R}^n}^P = \bigotimes_{i=1}^n ]a_i, b_i[$  (= produit cartésien d'ensembles)

Tous les ouverts de  $T_{\mathcal{R}^n}$  sont réunions des pavés  $\mathcal{O}_{\mathcal{R}^n}^P$ . Pour  $n = 3$  en particulier un pavé ouvert a une représentation géométrique très simple.

**Définition 1.15** (Topologie moins fine et topologie plus fine).

Considérons deux topologies  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  définies sur le même ensemble  $E$ . Si  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$  (c'est à dire l'ensemble des ouverts de  $\mathcal{T}_1$  est une sous-famille de l'ensemble des ouverts de  $\mathcal{T}_2$ ), alors on dit que  $\mathcal{T}_1$  est une topologie moins fine que la topologie  $\mathcal{T}_2$ . Ou, autrement, on dit que  $\mathcal{T}_2$  est une topologie plus fine que  $\mathcal{T}_1$ .

**Remarque 1.8.**

- a) Deux topologies définies sur  $E$  peuvent ne pas être comparables si l'une n'est ni moins fine ni plus fine que l'autre.
- b) Toutes les topologies comparables sur  $E$  sont ordonnées par inclusion, et on note

$$\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2 \text{ (pour } \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \text{)}$$

**Exemple 1.16.**

Soit  $(E, \mathcal{T})$  un espace topologique avec  $\mathcal{T}$  une topologie quelconque, (différente de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{S}$ ) alors la topologie discrète  $\mathcal{D}$  sur  $E$  et grossière  $\mathcal{S}$  sur  $E$  vérifient :

$$\mathcal{S} \preceq \mathcal{T} \preceq \mathcal{D}$$

Autrement dit, toute topologie  $\mathcal{T}$  est plus fine que la grossière et moins fine que la discrète.

## 3 Convergence

### 1 Suites convergentes dans $(E, \mathcal{T})$

**Définition 1.16.**

On dit qu'une suite d'éléments de  $E : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  est convergente vers  $a \in E$  si pour tout voisinage de  $a$ ,  $\mathcal{V}(a)$ , il existe un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in \mathcal{V}(a)$ .

\* On appelle  $a$  **limite** de la suite et on note  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

\*\* En d'autres termes, cette définition nous dit que n'importe quel voisinage de  $a$  contient presque tous les termes de la suite, sauf un nombre fini.

**Exemple 1.17.**

Soit  $(X, \mathcal{D})$  un espace topologique discret, et soit  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  une suite d'éléments de  $X$ . Un singleton  $\{b\}$  est un ouvert contenant  $b \in X$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = b$  l'ensemble  $\{b\}$  doit contenir presque tous les termes de la suite ; autrement dit, la suite  $\{a_n\}$  converge vers  $b$  si et seulement si elle est de la forme :  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, \dots\}$ . On vérifie :

**Proposition 1.1.**

Toute sous-suite d'une suite convergente dans  $(E, \mathcal{T})$  converge vers la même limite.

**2 Espaces topologiques séparés (ou de Hausdorff)****Définition 1.17.**

Un espace topologique  $(E, \mathcal{T})$  est **séparé** si pour tout couple  $a, b \in E$ , il existe deux voisinages  $\mathcal{V}(a), \mathcal{V}(b)$  disjoints :

$$\mathcal{V}(a) \cap \mathcal{V}(b) = \emptyset$$

Autrement dit deux points distincts quelconques de l'espace topologique séparé appartiennent à deux ouverts disjoints.

On verra par la suite au chapitre des espaces métriques l'importance de cette propriété pour l'unicité des limites des suites convergentes comme l'indique le théorème suivant :

**Théorème 1.8.**

Soit  $(E, \mathcal{T})$ , un espace topologique séparé, et soit une suite convergente vers  $a \in E$ . Alors **la limite  $a$  est unique.**

**Exemple 1.18.**

Soit  $(X, \mathcal{S})$ , un espace topologique grossier, ( $\mathcal{S}$  topologie grossière :  $\mathcal{S} = \{X, \emptyset\}$ ) où  $X$  a plus qu'un élément. Alors  $X$  ne peut pas être séparé.

**4 Continuité - Homéomorphismes****1 Continuité****Définition 1.18** (Applications continues).

Soient  $(E, \mathcal{T}_E)$  et  $(F, \mathcal{T}_F)$  deux espaces topologiques.

- a) Soit  $x_0 \in E$ . Une application  $f : (E, \mathcal{T}_E) \rightarrow (F, \mathcal{T}_F)$  est dite **continue en  $x_0$**  si pour tout voisinage  $\mathcal{V}_F(f(x_0))$  de l'image  $f(x_0)$  dans  $F$ , il existe un voisinage de  $x_0$ ,  $\mathcal{V}_E(x_0)$  tel que  $f^{-1}(\mathcal{V}_F(f(x_0))) = \mathcal{V}_E(x_0)$
- b)  $f : (E, \mathcal{T}_E) \rightarrow (F, \mathcal{T}_F)$ , est **continue sur  $E$**  (ou simplement continue) si elle est continue en tout point  $x \in E$ .

**Théorème 1.9** (utilisé souvent comme définition).

- i) L'application  $f : E \rightarrow F$  est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert :  $f^{-1}[\mathcal{O}_F] = \mathcal{O}_E$ .
- ii) L'application  $f : E \rightarrow F$  est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé est un fermé :  $f^{-1}[\mathcal{F}_F] = \mathcal{F}_E$

On peut montrer aussi facilement que :

**Théorème 1.10.**

Soient  $E, F, G$  trois espaces topologiques et  $f, g$  deux applications continues de  $E$  dans  $F$  et de  $F$  dans  $G$  respectivement  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$  alors, l'application composée  $g \circ f : E \rightarrow G$  est une application continue.

**2 Homéomorphismes (ou Homéomorphie)****Définition 1.19.**

Soient  $(E, \mathcal{T}_E), (F, \mathcal{T}_F)$  deux espaces topologiques. Une application  $f : (E, \mathcal{T}_E) \rightarrow (F, \mathcal{T}_F)$  est un homéomorphisme si elle est bijective et bicontinue. Les espaces  $E$  et  $F$  sont appelés alors homéomorphes.

**Exemple 1.19.**

L'intervalle ouvert  $X = ]-1, 1[$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}, \mathcal{U}$ ) espace topologique avec la topologie usuelle  $\mathcal{U}$  et  $(X, \mathcal{U}_X)$  avec la topologie induite  $\mathcal{U}_X$ . Prenons par exemple l'application continue

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \tan \frac{\pi x}{2} \end{aligned}$$

alors  $f^{-1} = \arctan$  est aussi continue  $\Rightarrow f$  homéomorphisme.

**Remarque 1.9.**

Pour une propriété  $P$  d'un espace topologique  $(E, \mathcal{T})$ , on dit qu'elle est un **invariant topologique** si chaque fois que  $(E, \mathcal{T})$  vérifie  $P$  alors tout espace homéomorphe à  $(E, \mathcal{T})$  vérifie également cette propriété  $P$ .

Par exemple : l'intervalle  $]-1, 1[$  de l'exemple 1.19 est borné alors que  $\mathbb{R}$  n'est pas borné

$\Rightarrow$  La propriété d'être "borné" ou pas n'est pas un invariant topologique.

Plus tard, on parlera des invariants topologiques comme la connexité, la compacité,

...

Et...pour un approfondissement et satisfaire votre curiosité, .... tourner la page....



# Bibliographie

- [1] G. ARFKEN, "Mathematical Methods for Physicists"(Academic Press)
- [2] J. BASS, "Cours de Mathématiques" (Masson)
- [3]
- [4] N. BOURBAKI : Topologie générale
- [5] G. CHOQUET, "Cours d'Analyse" Tome II Topologie (Masson)
- [6] R.COURANT -D.HILBERT "Methods of Mathematical.Physics"  
(Inerscience,Publishers)
- [7] P. DENNERY - A. KRZYWISKI, "Mathematics for Physicists"  
(Harper-Internat. Editions et "Dover" Publ.)
- [8] REED-SIMON Functional analysis 1 (Academic Press)
- [9] W.RUDIN
  - a) W. RUDIN, "Analyse réelle et complexe" (Masson)
  - b) W. RUDIN, "Principles of Mathematical Analysis" (McGraw-Hill)
- [10] Séries SCHAUM'S General topology (Lipschutz - (McGraw Hill)
- [11] L.SCHWARTZ "Cours d'Analyse (I, II)"(Hermann)



## Chapitre 2

# TOPOLOGIE II

## Espaces métriques

### 1 Espaces métriques - Distances - Boules

#### Définition 2.1.

Un ensemble  $E$  a la structure d'un espace métrique si on a défini une application  $d$ , sur l'espace produit

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

entre deux éléments  $x, y$  de  $E$ , appelée **distance** et qui vérifie les propriétés suivantes :

**d - 1 :**  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

**d - 2 :**  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie)

**d - 3 :**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (inégalité triangulaire)

On utilisera par la suite la notation habituelle :

$(E, d) \Leftrightarrow$  **espace métrique**  $E$  muni de la distance  $d$ .

#### Remarque 2.1.

$d$  a bien les propriétés géométriques qu'on attend d'une distance.

#### Définition 2.2.

a) On appelle **boule ouverte** de centre  $a$  et de rayon  $\rho$ , notée  $B(a, \rho)$ , l'ensemble des éléments de  $(E, d)$  situés à une distance de  $a$  strictement inférieure à  $\rho$  :

$$B(a, \rho) = \{x \in E \mid d(a, x) < \rho\}$$

b) On appelle **boule fermée** notée  $\overline{B}(a, \rho)$ , l'ensemble :

$$\overline{B}(a, \rho) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq \rho\}$$

#### Définition 2.3.

On appelle ensemble borné toute partie  $P \subset (E, d)$  qui peut être contenue dans une boule ouverte  $P \subseteq B(a, \rho)$

**Définition 2.4** (Sous-espaces métriques de  $(E, d)$ ).

Soit  $A$  une partie de  $(E, d)$  : la restriction à  $A$  de l'application  $d$ , définit aussi une distance  $d_A$  ; alors  $A$  est un sous-espace métrique de  $E$  et on note  $(A, d_A)$ .

**Définition 2.5** (Distances équivalentes).

On dit que deux distances  $d_1, d_2$  définies sur un ensemble  $E$  sont équivalentes, s'il existe deux constantes  $k_1 > 0, k_2 > 0$  (finies) telles que :

$$\forall x, y \in E \quad k_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq k_2 d_1(x, y)$$

**Remarque 2.2.**

Plus loin on verra le sens topologique de cette équivalence. Notation de l'équivalence  $d_1 \sim d_2$ .

**Définition 2.6** (Diamètre  $\delta$  - Distance  $d(p, A) \forall p \in E, A \subset E$ ).

a) On appelle diamètre d'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(E, d)$  la borne supérieure des distances dans  $A$  :

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$$

b)  $A$  est borné lorsque son diamètre est fini (à comparer avec la définition 2.3).

**Définition 2.7.**

Pour toute application  $f : X \mapsto (E, d)$  on appelle oscillation de  $f$  sur une partie  $Y$  de  $X$ , le diamètre de  $f(Y)$ . L'application  $f$  est dite bornée si son oscillation est finie  $\Leftrightarrow$  l'image  $f(Y)$  est bornée.

**Définition 2.8.**

On appelle distance  $d(p, A)$  d'un point  $p \in (E, d)$  et d'une partie  $A \subset E$  la plus petite des distances  $d(p, a) \forall a \in A$  :

$$d(p, A) = \inf \{d(p, a) : a \in A\}$$

**Définition 2.9.** On appelle distance de deux parties  $A, B$  de  $E$ , le nombre

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

**Remarque 2.3.** Attention ! malgré son nom  $d(A, B)$  n'est pas une distance.

## 2 Exemples d'espaces métriques et de distances

**Exemple 2.1.**

L'ensemble  $\mathbb{R}$  (nombres réels) muni de la distance habituelle  $d(a, b) = |b - a|$  est un espace métrique, avec la boule ouverte :  $B(a, \rho) = ]a - \rho, a + \rho[$  (intervalle ouvert).

**Exemple 2.2.**

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^k \Leftrightarrow$  (ensemble de familles ordonnées de  $k$  nombres réels :  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ). On définit les applications suivantes, et on vérifie qu'il s'agit de 3 distances sur  $\mathbb{R}^k$ .

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d_0 : (x, y) \mapsto d_0(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^k (y_i - x_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_1 : (x, y) \mapsto d_1(x, y) = \sum_{i=1}^k |y_i - x_i|$$

$$d_2 : (x, y) \mapsto d_2(x, y) = \max_{i=1, \dots, k} |x_i - y_i|$$

\*  $(\mathbb{R}^k, d_0), (\mathbb{R}^k, d_1), (\mathbb{R}^k, d_2)$  sont des espaces métriques.

**Remarque 2.4.**

En vérifiant que le rapport de deux quelconques de ces distances est borné, on montre que ces trois distances  $d_0, d_1, d_2$  sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^k$ .

**Remarque 2.5.**

Les boules ouvertes de plan  $\mathbb{R}^2$ , par rapport aux distances  $d_0, d_1, d_2$  respectivement peuvent se représenter graphiquement par un disque ouvert  $B_{d_0}(0, 1)$  (rayon  $\rho = 1$ ), un losange ouvert  $B_{d_1}(0, 1)$  et un carré ouvert  $B_{d_2}(0, 1)$  respectivement.

**Exercice**

Faire la représentation graphique de ces "boules". Vous constaterez que :

Comme l'indiquent bien ces graphiques, les boules ouvertes (ou fermées) d'un espace métrique ne sont pas toujours des «boules» au sens de la géométrie élémentaire à 2 ou 3 dimensions.

**Exemple 2.3** (Espaces de fonctions numériques).

a) On considère l'espace des fonctions bornées définies sur un ensemble  $S, f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f(S) \subset \mathbb{R}$  ensemble borné). On note  $B(S)$  cet espace et on peut le munir de la distance :

$$d(f, g) = \sup_{s \in S} |g(s) - f(s)|$$

$B(S)$  est alors un espace métrique.

b) Soit  $\mathcal{C}(\Delta)$  l'espace de fonctions continues sur l'intervalle fermé et borné  $\Delta = [a, b]$ . On peut définir sur  $\mathcal{C}(\Delta)$  plusieurs distances non équivalentes.

i)  $d_1(f, g) = \sup_{t \in \Delta} |g(t) - f(t)|$  (distance de la convergence uniforme)

$(\mathcal{C}(\Delta), d_1)$  est un espace métrique.

Si on représente graphiquement la boule ouverte  $B_1(f_0, \rho)$  avec  $f_0 \in ([a, 1])$  cette boule (par rapport à la distance  $d_1$  est formée de fonctions continues  $g$  dont le graphe se trouve dans l'aire limitée par les graphes de  $f_0 - \rho$  et  $f_0 + \rho$  ( $\rho$  donné  $> 0$ ) :

ii)  $d_2(f, g) = \int_{\Delta} |g(t) - f(t)| dt$  (distance de la convergence en moyenne)

$(\mathcal{C}(\Delta), d_2)$  est un espace métrique et  $d_1 \not\sim d_2$ .

iii)  $d_3(f, g) = \left[ \int_{\Delta} (g(t) - f(t))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$  (distance de la convergence en moyenne quadratique)

$(\mathcal{C}(\Delta), d_3)$  est un espace métrique et  $d_1 \not\sim d_3, d_2 \not\sim d_3$ .

**Exemple 2.4** (Distance triviale).

a) Sur un ensemble  $X$  quelconque ( $\neq \emptyset$ ), on peut considérer l'application :

$$d_T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto d_T(x, y) \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

$d_T$  définit une distance sur  $X$  et  $(X, d_T)$  est un espace métrique ;  $d_T$  est appelée distance triviale sur  $X$ .

Soit  $a \in X$ . La boule ouverte  $B_T(a, \rho)$  dans  $X$  (par rapport à la distance triviale  $d_T$ ) est définie par :

$$B_T(a, \rho) = \begin{cases} X & \text{si } \rho > 1 \\ \{a\} & \text{si } \rho \leq 1 \end{cases}$$

b) Sur l'ensemble  $X$  non vide on définit aussi la distance :

$$d'_T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto d'_T(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

et  $(X, d'_T)$  = espace métrique.

C'est une distance équivalente à la distance triviale et la boule ouverte (de rayon unité, de centre  $a$ ) est  $B_{d'_T}(a, 1) = \{a\}$ . C'est à dire les singletons sont des boules ouvertes pour la distance  $d'_T$  comme pour la distance triviale  $d_T$ .

### 3 Topologie des espaces métriques

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On peut définir une topologie sur  $E$  (voisinages, ouverts) en utilisant les boules ouvertes de  $(E, d)$  ainsi :

**Définition 2.10.**

- a) Pour tout point  $a \in E$ , on appelle voisinage de  $a$ ,  $\mathcal{V}(a)$ , toute partie de  $E$  qui contient une boule ouverte  $B(a, \rho)$ .
- b) On appelle ouvert  $\mathcal{O}_E$ , toute partie de  $E$  qui, en même temps qu'un point  $a \in E$ , contient une boule ouverte  $B(a, \rho)$  et on a le :

**Théorème 2.1.**

*Soit  $(E, d)$  un espace métrique.*

- i) *Toutes les boules ouvertes de  $(E, d)$  sont les ouverts de  $E$ .*
- ii) *Toutes les boules fermées de  $(E, d)$  sont les fermés de  $E$ .*
- iii) *Toutes les parties contenant un seul point sont des fermés de  $E$ .*
- iv) *La famille des boules ouvertes de  $(E, d)$  est une base d'une topologie sur  $E$ .*

**Définition 2.11.**

La topologie  $\mathcal{T}$  engendrée sur  $(E, d)$  par la famille des boules ouvertes (v. Théorème précédent) est appelée **la topologie métrique**, ou la **topologie induite par  $d$** .

Pour les distances équivalentes on a la propriété importante :

**Théorème 2.2.** *Deux distances équivalentes sur un espace métrique  $E$ , induisent la même topologie.*

**Remarque 2.6.**

Attention la proposition réciproque du théorème précédent est fausse ! Deux distances  $d, d'$  sur un espace  $E$ , qui définissent la même topologie ne sont pas toujours équivalentes. Exemple, les distances :

$$d_0 = |x - y| \text{ et } d^* = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

induisent à  $\mathbb{R}^*$  la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  mais elles ne sont pas équivalentes.

**Exemple 2.5.**

- a) Les distances  $d_0, d_1, d_2$  (de l'exemple 2.2) sur  $\mathbb{R}^k$  sont équivalentes ; elles induisent la même topologie sur  $\mathbb{R}^k$  qui est la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}^k$  (v. boules ouvertes associées).
- b) Les métriques triviales  $d_T$  et  $d'_T$  (v. les exemples 2.4) induisent sur  $X$  (espace métrique) la même topologie : les boules ouvertes  $B_{d_T}(a, 1) = \{a\}$  sont des singletons qui sont les ouverts. Il s'agit donc de la même base de topologie que de la topologie discrète.

## 4 Espaces vectoriels normés $\Rightarrow$ espaces métriques

A tout espace vectoriel normé, on peut associer un espace métrique par le :

### Théorème 2.3.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

i) L'application  $d$  définie par :

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall (x, y) \in E \times E$$

est une distance appelée distance induite par la norme de  $E$ ; donc  $(E, d)$  est un espace métrique  $\Rightarrow$  espace topologique.

ii) Cette distance  $d$  satisfait les propriétés :

a) Invariance par translation  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$

b)  $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$  (invariance d'échelle)

### Remarque 2.7.

On vérifie directement que les exemples du cours des espaces vectoriels normés, donnent par application directe du théorème ci-dessus, les exemples 2.1, 2.2, 2.3.b.iii respectivement. Pourriez-vous en trouver d'autres ?

## 5 Isométries

### Définition 2.12.

Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  deux espaces métriques. On dit que ces deux espaces sont **isométriques** si et seulement si, il existe une application bijective  $f : E \rightarrow F$  telle que "les distances sont conservées" c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, d_E(x, y) = d_F(f(x), f(y))$$

L'application  $f$  est appelée une **isométrie**. On vérifie facilement qu'une isométrie établit une relation d'équivalence entre  $E$  et  $F$ .

### Remarque 2.8.

D'après la définition ci-dessus on note qu'une isométrie n'est pas autre chose qu'un isomorphisme pour la structure des espaces métriques d'où le :

### Théorème 2.4.

Si  $(E, d_E)$  est un espace métrique isométrique à l'espace métrique  $(F, d_F)$ , alors les deux espaces sont homéomorphes.

### Exemple 2.6.

On vérifie que les isométries de l'espace Euclidien (distance usuelle)  $\mathbb{R}^n$ , sur lui-même qui conservent l'origine ne sont autres que les transformations linéaires (ex. Rotations) qui conservent la forme quadratique  $\sum_{i=1}^n a_i^2$  (v. produit scalaire - norme \* distance dans  $\mathbb{R}^n$ ).

### Remarque 2.9.

La réciproque du théorème précédent est en général fautive, c'est à dire deux espaces métriques homéomorphes ne sont pas toujours isométriques :



**Exemple 2.7.**

Soit  $(E, d_T)$  espace métrique muni de la distance triviale :

$$d_T(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \quad \forall (x, y) \in E^2$$

et soit  $(F, d'_T)$  espace métrique muni de la distance :

$$d'_T(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \quad \forall (x, y) \in F^2$$

Admettons que  $\text{Card } E = \text{Card } F > 1$ . Comme les deux distances sont différentes  $d_T \neq d'_T$ , les deux espaces ne peuvent pas être isométriques. Mais on sait, par contre, que  $d_T$  et  $d'_T$  induisent la même topologie sur  $E$  et  $F$  respectivement qui est la topologie discrète ; or deux espaces discrets avec le même cardinal sont homéomorphes. On a donc un exemple pour illustrer la remarque 2.9. Autrement dit :  $(E, d_T)$  et  $(F, d'_T)$  sont homéomorphes sans être isométriques.

**Exemple 2.8** (Généralisation des isométries dans  $\mathbb{R}^n$ ).

Les opérateurs unitaires ( $U^*U = UU^* = I$ ) définis sur un espace préhilbertien  $H$  conservent les normes définies à partir du produit scalaire, donc les distances aussi :  $U \equiv$  isométrie  $\Rightarrow d(Ux, Uy) = \|Ux - Uy\| = \|x - y\| = d(x, y)$ . (Preuve ?)

## 6 Suites convergentes dans les espaces métriques

**Définition 2.13.**

On appelle suite d'éléments d'un espace métrique  $(E, d)$  toute application :  $N \rightarrow E$  où  $\left( \begin{matrix} N^* & \rightarrow & E \\ n & \mapsto & x_n \end{matrix} \right)$  et on note :  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où l'ensemble  $\mathbb{N}$  des nombres entiers positifs est totalement ordonné.

**Définition 2.14.**

On appelle sous-suite ou suite extraite, la suite obtenue à partir de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en ne considérant que les termes d'indice  $n_k$  (avec  $n_k$  nombre entier strictement croissant avec  $k$ ) autrement dit, on considère l'application : 
$$\begin{matrix} \sigma : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ k & \rightarrow & x_{n_k} \end{matrix}$$

**Définition 2.15.**

- a) *Définition métrique* : une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un élément  $a$  de  $E$ , si la distance de  $x_n$  à  $a$  tend vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment ou autrement,  $\forall \epsilon > 0, \exists N : n > N \rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$
  - b) *Définition topologique (ou géométrique)* : une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a \in E$ , si et seulement si tous les termes de la suite, sauf un nombre fini, se trouvent dans la boule ouverte  $B(a, \epsilon)$  autrement :  $\forall \epsilon > 0, \exists N : n > N \Rightarrow x_n \in B(a, \epsilon)$
- \* On appelle  $a$  la **limite** de la suite et on dit que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une **suite convergente**.  
 \* Si la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

## 7 Caractérisation des fermés dans un espace métrique

On a le résultat suivant qui donne un caractère plus spécifique des fermés dans un espace métrique.

### Théorème 2.5.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique et soit  $A \subset E$ .

- i) Le point  $x \in E$  appartient à la fermeture  $\bar{A}$  si et seulement si  $x$  est limite d'une suite d'éléments de  $A \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
- ii)  $A$  est fermé si et seulement si toute suite convergente de  $A$  converge vers un élément de  $A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \text{ (convergente)} \subset A \Rightarrow \lim x_n \in A$

## 8 Propriétés des suites convergentes dans $(E, d)$

### Théorème 2.6.

Tout espace métrique  $(E, d)$  est un espace topologique séparé (cf.def.1.17 du ch.I) pour la topologie induite par la métrique  $d$ .

### Remarque 2.10.

Le caractère séparé d'un espace métrique a comme conséquence l'unicité de la limite de toute suite convergente dans l'espace (cf.th. 1.8 du chapitre I). Cette propriété, ainsi que le caractère borné et convergence de toute suite-extraite d'une suite convergente, sont présentés par le théorème suivant :

### Théorème 2.7 (Suites convergentes dans les espaces métriques).

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

- i) Soient  $x_1 \in E, x_2 \in E$ , deux limites d'une suite convergente  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  alors

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lim x_n = x_1 \\ \lim x_n = x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{unicité}$$

- ii) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  est une suite convergente dans  $E$  alors  $\{x_n\}$  est bornée.
- iii) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  est une suite convergente dans  $E$  alors toute sous-suite  $\{x_{n_k}\}$  est convergente et  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Pour deux distances équivalentes, on a le :

### Théorème 2.8.

Considérons les deux espaces métriques  $(E, d)$  et  $(E, d')$  où  $d$  et  $d'$  sont deux distances équivalentes, alors toute suite convergente par rapport à  $d$  est aussi convergente par rapport à  $d'$ .

### Remarque 2.11.

Pour une fois encore, on note l'**équivalence** des topologies induites par deux distances équivalentes :  $\Rightarrow$  mêmes voisinages  $\Rightarrow$  mêmes boules ouvertes  $\Rightarrow$  mêmes propriétés de convergence.

## 9 Continuité des applications dans les espaces métriques

### 1 Continuité

Soient  $(E, d_E), (F, d_F)$  deux espaces métriques.

#### Définition 2.16.

**a)** (Continuité en  $x_0 \in E$  aspect métrique)

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application ; on dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta(x_0, \epsilon) > 0 : \forall x, d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F[f(x), f(x_0)] < \epsilon$$

**b)** (Continuité en  $x_0 \in E$  aspect topologique

$\Leftrightarrow$  géométrique)

Soit  $f : E \rightarrow F, f$  continue en  $x_0$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta(x_0, \epsilon) > 0 : \forall x \in B_E(x_0, \eta) \Rightarrow f(x) \in B_F(f(x_0), \epsilon)$$

**c)**  $f$  continue si et seulement si  $f$  continue en  $x \forall x \in E$ .

On a le résultat suivant :

#### Théorème 2.9 (Continuité et espaces métriques).

Soient  $(E, d_E), (F, d_F)$  deux espaces métriques et soit une application  $f : E \rightarrow F$  alors :

- i)**  $f$  est continue en  $x_0 \Rightarrow$  l'image de toute suite convergente vers  $x_0$  est une suite convergente vers  $f(x_0)$ .
- ii)**  $f$  est continue  $\Rightarrow$  l'image de toute suite convergente est une suite convergente.

### 2 Continuité uniforme

#### Définition 2.17.

Soient  $(E, d_E), (F, d_F)$  deux espaces métriques et soit une application  $f : E \rightarrow F$  alors :

**a)**  $f$  est dite **uniformément continue** si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall X \subset E$$

les diamètres  $\delta_E(X)$  et  $\delta_F(f(X))$  vérifient :

$$\delta_E(X) \leq \eta \Rightarrow \delta_F(f(X)) \leq \epsilon$$

ou

**b)**  $f$  est **uniformément continue**

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \eta(\epsilon) > 0 : d_E(x, y) \leq \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

#### Remarque 2.12.

- a)** Notons que dans le cas de la continuité uniforme  $\eta$  ne dépend pas de  $x$  et  $y$  ; alors que dans le cas de la continuité simple  $\eta$  dépend non seulement du choix de  $\epsilon$  mais aussi du choix de  $x$  (v. définition 2.17).

- b) Si  $f$  est uniformément continue, elle est aussi continue : attention la proposition réciproque est fautive comme on voit par l'exemple suivant :

**Exemple 2.9.**

$f : x \rightarrow f(x) = x^2$  est continue mais pas uniformément continue puisque  $\forall x \in [a, a + \eta]$   $\delta(f(x)) \geq |2a\eta + \eta^2|$

## 10 Suites de Cauchy dans les espaces métriques - Espaces complets

**Définition 2.18.** Une suite  $\{x_n\}$  dans un espace métrique  $(E, d)$  est dite **de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : \left. \begin{array}{l} \eta \geq N \\ m \geq N \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \epsilon \text{ (condition de Cauchy)}$$

**Proposition 2.1.**

Une suite convergente est une suite de Cauchy.

Et voici les propriétés intéressantes des suites de Cauchy dans les espaces métriques, qui souvent sont utilisées comme critères de la complétude (v. plus loin) ou pas des espaces métriques.

**Théorème 2.10.**

Si  $(E, d)$  un espace métrique, alors :

- i) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.
- ii) Pour qu'une suite de Cauchy soit convergente dans  $E$ , il suffit qu'une de ses sous-suites soit convergente dans  $E$ .
- iii) L'image d'une suite de Cauchy est une partie bornée de  $E$ .

**Définition 2.19.**

On dit qu'un espace métrique est **complet** si toute suite de Cauchy d'éléments de  $E$  est convergente vers un élément de  $E$ .

**Remarque 2.13.**

- a) Dans un espace complet, une suite est **convergente si et seulement si elle vérifie une condition de Cauchy**.
- b) Intérêt de la condition de Cauchy : elle ne porte que sur les termes de la suite et elle n'oblige pas à introduire la limite.

**Exemple 2.10** (Exemples et contrexemples).

- i)  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^n$  munis de la distance habituelle sont des espaces complets. (Pour  $\mathbb{R}$  critère de Cauchy).
- ii)  $\mathbb{Q}$  ensemble des rationnels muni de la distance ordinaire n'est pas complet. Preuve : prendre comme suite de rationnels, la suite des valeurs décimales approchées de  $\sqrt{2}$ . c'est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$  convergente dans  $\mathbb{R}$  et elle ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$  puisque  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

- iii)  $B(S')$  muni de la distance de la convergence uniforme est complet.
- iv)  $\mathcal{C}(\Delta [a, b])$  muni de la distance de la convergence uniforme est complet. Mais,  $\mathcal{C}(\Delta)$  muni de la distance de la convergence en moyenne n'est pas complet.

**Remarque 2.14** (Complété d'une espace métrique).

Si un espace métrique  $(E, d)$  n'est pas complet, on peut le compléter en utilisant une méthode analogue à celle qui sert à  $\mathbb{R}$  à partir de  $\mathbb{Q}$ . En résumé : le complété de  $E$  est l'espace  $\widehat{E} = \widetilde{S} / \approx$  quotient de l'espace  $\widetilde{S}$  de toutes les suites de Cauchy dans  $E$  par la relation d'équivalence,  $\mathfrak{R} : \{x_n\} \approx \{y_n\}$  si et seulement si  $\lim d(x_n, y_n) = 0$ .

On munit  $\widehat{E}$  de la distance  $\widetilde{d}(\{x_n^*\}, \{y_n^*\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$  où  $\{x_n^*\}$  (resp  $\{y_n^*\}$ ) désigne une classe d'équivalence élément de  $\widehat{E}$  qui contient  $\{x_n\}$  (resp.  $\{y_n\}$ ).

On montre alors que  $(\widehat{E}, \widetilde{d})$  est complet.

## 11 Applications. Théorème du point fixe

**Définition 2.20.**

- a) Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On dit que l'application  $T : E \rightarrow E$  est une **contraction**, si  $\forall (x, y) \in E_2$ , on a :

$$d(T(x), T(y)) \leq Kd(x, y) \text{ avec } 0 \leq K < 1$$

- b) On appelle **constante de contraction** la plus petite valeur de  $K$ .
- c) On appelle **point fixe** de l'application  $T$ , tout  $z \in E$  invariant par  $T$   
 $\Leftrightarrow T(z) = z$

**Théorème 2.11** (Point fixe global).

Dans un espace métrique complet, toute contraction admet un point fixe et un seul.

**Théorème 2.12** (Point fixe local).

Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et soit  $B(a, \rho) \subset E$ , une boule de centre  $a$  et de rayon  $\rho$ . Si l'application  $T : E \rightarrow E$  est une contraction dans  $B(a, \rho)$  de constante de contraction inférieure à  $K < 1$  et si :

$$d(T(a), a) < (1 - K)\rho$$

alors :  $T$  admet dans  $B$  un point fixe et un seul.

## 12 Convergence uniforme et espace métrique - Conservation de la continuité par la convergence uniforme

Soit  $X$  un espace topologique et  $Y$ , un espace métrique. On considère des suites d'applications de  $X$  dans  $Y$ ,  $\{f_n\} : X \rightarrow Y$ . Soit  $\mathcal{F}(X, Y)$ , l'ensemble des applications de  $X$  dans  $Y$ .

**Définition 2.21** (Rappel : Convergence simple).

On dira que  $\{f_n\}$  converge simplement vers  $f$  si pour tout  $x \in X$ , la suite  $f_n(x)$  converge vers  $f(x)$ .

**Exemple 2.11.**

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

La suite d'applications  $x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$

La suite converge vers  $f = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

**Définition 2.22** (Convergence uniforme).

On dit que  $\{f_n\}$  converge uniformément vers  $f$  ( $f$  est limite uniforme de  $\{f_n\}$ ) si  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$  et  $\forall x \in X$ ,  $d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$ .

**Interprétation graphique**

Dans l'espace  $\mathcal{F}(X, Y)$ , muni de la distance de la convergence uniforme :

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

On considère la boule  $B(f, \epsilon)$ . Dire que la suite de fonctions  $\{f_n\}$  converge uniformément vers  $f$  équivaut à dire que pour tout  $n$ , à partir d'un certain rang, tous les  $f_n$  ont leur graphe dans la boule  $B(f, \epsilon)$ .

**Exemple 2.12.**

La suite des fonctions :  $f_n [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{1 + (x - n)^2} = f_n(x) \text{ converge uniformément vers } f = 0.$$

**Remarque 2.15.**

La convergence uniforme implique la convergence simple mais la réciproque est fautive.

Et, terminons avec :

**Théorème 2.13.**

On considère une suite  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}(X, Y)$  qui converge uniformément vers  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ . Si toutes les fonctions  $f_n$  sont continues en  $a \in X$ ,  
 $\Rightarrow f$  est continue en  $a$ .