E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 25 janvier 2010
ANALYSE (II) T.D.7
(Topologie- Esp.Topologiques- Esp. Métriques)

1

i)

Considérons l'espace topologique $(X,\ \mathcal{T})$ où $X = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ et la topologie $\mathcal{T}$ sur l'ensemble X est définie par :

$$\mathcal{T} = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{a,\ b\}, \{a,\ c,\ d\},\ \{a,\ b,\ c,\ d\},\ \{a,\ b,\ e\}\}$$

a) Déterminer les sous-ensembles fermés de X.

b) Déterminer l'adhérence des ensembles : $\{a\}, \{b\}$, et $\{c,\ e\}$

c) Quels sont parmi les ensembles de b) ceux qui sont denses dans X ?

ii)

1) Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur $\mathbb{R}$ formée de $\mathbb{R},\ \emptyset,$ et de tous les intervalles infinis ouverts : $E_a =]a,\ \infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.
Trouver l'intérieur , l'extérieur et la frontière de l'intervalle infini fermé suivant $A = [7,\ \infty[$.

2) Indiquer si chacun des intervalles suivants est un voisinage de 0 pour l'espace topologique $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle :

$$a)\ \ ]-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}];\ \ b)\ \ ]-1,\ 0];\ \ c)\ \ [0,\ \frac{1}{2}[;\ \ d)\ \ ]0,\ 1].$$

2

Soit d une distance sur un ensemble non vide E. Montrer que les applications $e_1,\ e_2$ définies par i) et ii) respectivement sont également des distances sur E.

i)

$$e_1(a,\ b) = min(1,\ d(a,\ b)), \quad \text{où} \quad (a,\ b) \in E^2.$$

ii)

$$e_2(a,\ b) = \frac{d(a,\ b)}{1 + d(a,\ b)}, \quad \text{où} \quad (a,\ b) \in E^2.$$

3

Soit (E, d) un espace métrique . Montrer les propriétés suivantes.

i) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

ii) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.

iii) Pour qu'une suite de Cauchy converge dans (E, d), il est suffisant qu'une de ses sous suites $\{x_{n_k}\}$ converge dans (E, d).

iv) L'image d'une suite de Cauchy est une partie bornée de (E, d).

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 2 février 2010
ANALYSE (II) T.D.8
(Topologie- Esp.Topologiques- Esp. Métriques)

1

Soit l'espace topologique : $(X, \mathcal{T})$ avec :

$$X = \{a, b, c, d, e\}; \qquad \mathcal{T} = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c,\ d\}, \{a,\ c,\ d\},\ \{b,\ c,\ d,\ e\},\ \}$$

Soit $A \subset X$ définie par : $A = \{a,\ d,\ e\}$ Trouver la topologie $\mathcal{T}_A$ **induite par** $\mathcal{T}$ **sur** A et justifier votre réponse : Votre $\mathcal{T}_A$ doit être une topologie bien définie.

2

1.) Montrer que les opérateurs unitaires définis sur un espace préhilbertien H, sont des **isométries** .

(Autrement dit : ils conservent les distances associées aux normes définies à partir du produit scalaire.)

2.)

Soit $(E,\ d_T)$ espace métrique muni de la distance triviale :

$$d_T(x,\ y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \quad \forall (x,\ y) \in E^2$$

et soit $(F,\ d'_T)$ espace métrique muni de la distance :

$$d'_T(x,\ y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \quad \forall (x,\ y) \in F^2$$

Admettons que Card E =Card $F > 1$.

- i) Montrer que les deux espaces metriques E et F sont homéomorphes.
- ii) Montrer que ces deux espaces **ne sont pas isométriques.**

3

On considère l'espace des fonctions bornées définies sur un ensemble S, $f \to \mathbb{R}$ ($f(S) \subset \mathbb{R}$ ensemble borné). On note $B(S)$ cet espace et on peut le munir de la distance suivante appelée "distance de la convergence uniforme"

$$d(f,\ g) = \sup_{s \in S} |g(s) - f(s)|$$

Montrer que $\mathcal{B}(\mathcal{S}), d)$ (muni de cette distance) est un espace métrique **complet**.

4

i) Montrer le théorème du point fixe global et représenter graphiquement la séquence des étapes importantes pour cette démonstration.

II) Montrer le théorème du point fixe local.