E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

ANALYSE II (Esp.Topologiques et Métriques-Connexité
Convexité-Compacité-Optimisation-Proj.Orthogonale)
Devoir surveillé n^o 2
donné le 24 mars 2011
(Durée 2h) **(Aucun document autorisé)**

I (6 *Pts.*)

Résoudre le problème d'optimisation suivant par la **méthode de substitution et la méthode du Lagrangien** :

$$Opt\{G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 5x_1 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 + 4x_4\}$$

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x_2, x_3) : x_2^2 - x_3 = 3 \\ g_2(x_1, x_4) : x_4 - x_1 = 1 \end{array} \right\}$$

II (6 *Pts.*)

- i) Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach.
  - a) Est-il un espace **métrique complet** ? Justifier votre réponse et définir la distance associée à la norme $||.||$.
  - b) Est- il un espace de **Hilbert** ? Justifier votre réponse.
  - c) Soit F un sous-espace **fermé** de E. Montrer que F est aussi un espace de Banach.
  - d) Soit A un sous-espace **compact** et **convexe** de $(E, ||.||)$.
    - a) Montrer que la fermeture $\bar{A}$ de A est aussi convexe.
    - b) Soit $f : A \to E$ une application continue sur A à valeur dans $S \subset \mathbb{R}$ montrer que $f \in \mathcal{B}(A)$.
- **ii)** Soit $X =]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$. On considère l'application δ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \delta : & X \times X & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (x,\ y) & \mapsto & \delta(x, y) = |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}| \end{array} \qquad (0.0.1)$$

1. Montrer que δ est une **distance sur** X.
2. Soit la suite :

$$\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}^*} \quad \text{avec : } u_n = n$$

Montrer que $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une **suite de Cauchy**.
L' espace métrique $(X,\ \delta)$ est-il **complet** par rapport à la distance δ ?

III (8 *Pts.*)

i) Soit $(\mathbb{R}, d)$ l'espace métrique des nombres réels muni de la **distance habituelle** $d(x, y) = |x - y|$. On considère l'interval $I \subset \mathbb{R}\ : I = [-1, 1]$ et la fonction :

$$\begin{array}{rl} f : I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x) = 8 - \dfrac{x^2}{4} \end{array}$$

- a) Est-ce que $f \in \mathcal{C}(I)$?
- b) Montrer qu'il existe un nombre réel k avec $0 < k < 1$, tel que :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall\, x, y \in I$$

  Autrement dit montrer que : f est **contractante sur I.**
  Y a-t-il un point fixe x_0 de f sur I ?
  Calculer x_0. Est-il unique ? Justifier votre réponse.
- c) Donner un exemple d'un intervalle $\tilde{I}$ qui contient I ($I \subset \tilde{I}$), tel que f n' y soit pas contractante.
- d) Utiliser un critère de votre choix pour étudier la **convexité (ou concavité)** de f et de $-f$. Pourriez vous optimiser cette fonction ? Donner une réponse précise.
- e) Est-ce que l'image par f de l'intervalle I est **connexe** ? Justifier votre réponse en utilisant un théorème du cours (**sans démonstration**).

ii)

Soit $\mathcal{L}_2$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de carré intégrables d'après Lebesgue sur l'intervalle $[-1,\ 1]$. On munit cet espace avec le produit scalaire suivant :

$$\forall\ (f,\ g)\ \in\ \mathcal{L}_2^2\ :\ < f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

a) A partir de ce produit scalaire, définir une norme sur cet espace et la distance associée à cette norme. On fait l'hypothèse que l'espace $\mathcal{L}_2$ est **complet par rapport à cette distance**.

Est-ce-que $\mathcal{L}_2$ est un espace de Banach, ou de Hilbert (ou tous les deux) ?

b) On considère le système orthonormal de l'espace $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{V} = \{\ \phi_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots\ldots}$$

où ϕ_n sont les polynômes de Legendre orthonormalisés.

Soit $\mathcal{N}$ le sous espace de $\mathcal{L}_2$ qui est engendré par toutes les combinaisons linéaires du type :

$$S_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \phi_i(x)$$

$\mathcal{N}$ est-il un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathcal{L}_2$?

Soit f la fonction étudiée dans i) :

$$f(x) = 8 - \frac{x^2}{4}.$$

Construire la projection orthogonale $f_\perp$ de f sur $\mathcal{N}$. Données :

$$\phi_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \quad \phi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{3x^2 - 1}{2}, \qquad (0.0.2)$$
$$\phi_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}}\,\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

d) Quelle est la meilleure approximation de la fonction f par une série du type S_3?

Justifier votre réponse en minimisant la distance $d(f,\ S_3)$, (que vous avez définie dans a) de f par rapport à un vecteur quelconque de $\mathcal{N}$.

Donner l'énoncé du théorème que vous avez appliqué.

e) Donner une autre méthode pour minimiser cette distance.