Normes vectorielles et matricielles

On se place sur un corps $\mathbb{K}$. En pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note A^* la matrice transconjuguée si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et A^T la matrice transposée si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1 Normes vectorielles

L'application $||.|| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \\ ||\alpha v|| = |\alpha| ||v|| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{K}^n \\ ||u + v|| \leq ||u|| + ||v|| \quad \forall u, v \in \mathbb{K}^n \end{array} \right.$$

Définition 1.1 (Normes $||.||_p$)

On définit : $\forall v \in \mathbb{K}^n, \forall 1 \leq p < +\infty, ||v||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p}$ *et* $||v||_\infty = \max_{i=\{1,\dots,n\}} |v_i|$.

$||.||_1$ *et* $||.||_\infty$ *sont clairement des normes.*

Lemme 1.1 $\forall 1 < p < +\infty, \forall x, y \geq 0, xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ *avec* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Preuve : $xy = \exp(\log(x) + \log(y)) = \exp(\frac{1}{p}\log(x^p) + \frac{1}{q}\log(y^q)) \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ (convexité de l'exponentielle). ■

Lemme 1.2 ((Inégalité de Hölder)) $|v^*u| \leq ||u||_p ||v||_q \quad \forall u, v \in \mathbb{K}^n, \forall 1 < p < +\infty$, *avec* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Preuve : $\forall 1 \leq i \leq n, \dfrac{|u_i \bar{v}_i|}{||u||_p ||v||_q} \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{|u_i|^p}{||u||_p^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{|v_i|^q}{||v||_q^q}$. Le résultat s'obtient par sommation sur i. ■

Proposition 1.1 $||.||_p$ *est une norme sur* $\mathbb{K}^n \quad \forall 1 < p < +\infty$.

Preuve : Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire :

$$||u + v||_p^p = \sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i||u_i + v_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i||u_i + v_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |v_i||u_i + v_i|^{p-1}$$

Hölder $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |u_i||w_i| \leq ||u||_p ||w||_q \quad \forall u, w \in \mathbb{K}^n$ avec $q(p-1) = p$.
On choisit $w \in \mathbb{K}^n$ tel que $w_i = |u_i + v_i|^{p-1}, \forall 1 \leq i \leq n$.
Alors $||u + v||_p^p \leq (||u||_p + ||v||_p)||u + v||_p^{p-1}$. ■

Remarque 1.1 $||.||_p$ *n'est pas une norme pour* $p < 1$.
Exemple avec $p = 1/2$ *:* $u = (1\ 0), v = (0\ 1) \Rightarrow 4 = ||u + v||_p > ||u||_p + ||v||_p = 2$

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Attention : les constantes d'équivalence dépendent de la dimension :

Proposition 1.2

$$||u||_p \leq ||u||_q \leq n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} ||u||_p, \quad 1 \leq q \leq p < +\infty,$$
$$||u||_\infty \leq ||u||_p \leq n^{\frac{1}{p}} ||u||_\infty, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

2 Normes matricielles

Définition 2.1 $||.|| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ *est une norme matricielle si et seulement si :*

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, ||\alpha A|| = |\alpha| ||A||,$
3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), ||A + B|| \leq ||A|| + ||B||,$
4. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), ||AB|| \leq ||A|| ||B||.$

Remarque 2.1 *Toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en tant qu'espace vectoriel ne sont pas des normes matricielles.*
Exemple : $||A|| = \max_{i,j} |a_{ij}|$ *est une norme, mais ce n'est pas une norme matricielle car*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow ||A|| = 1 \quad et \quad n = ||A^2|| > ||A||^2 = 1$$

2.1 Norme subordonnée à une norme vectorielle

Proposition 2.1 *À toute norme $||.||$ sur $\mathbb{K}^n$ on peut associer une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*

$$||A|| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{x \in \mathbb{K}^n, ||x||=1} ||Ax||.$$

On dit que $||.||$ (en tant que norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est une norme subordonnée *à la norme vectorielle $||.||$.*

Preuve : $\sup_{||x||=1} ||Ax|| < +\infty$ et est atteint car l'application $x \longmapsto ||Ax||$ est continue et la sphère unité est compacte (car on est en dimension finie).

$$||A + B|| = \max_{||x||=1} ||Ax + Bx|| \leq ||A|| + ||B||$$

et

$$||ABx|| \leq ||A|| ||Bx|| \leq ||A|| ||B|| ||x|| \quad \forall x \neq 0$$

Donc $||.||$ est bien une norme matricielle.
L'équivalence avec les deux autres expressions est laissée en exercice. ■

Remarque 2.2 *Si $||.||$ est une norme subordonnée, alors $||I_n|| = 1$.*

Définition 2.2 (Rappel) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé et a n racines. On note $sp(A) = \{$valeurs propres de $A\}$ le spectre de A et $\rho(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$ le rayon spectral de A.*

Proposition 2.2

- $||A||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (= \max ||.||_1$ *des lignes*),
- $||A||_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = ||A^*||_\infty,$
- $||A||_2 = ||A^*||_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}.$

Preuve :
$\bullet ||Ax||_\infty = \max_i |\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j| \leq \left(\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) ||x||_\infty \Rightarrow ||A||_\infty \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$

Soit i_0 un indice qui réalise le maximum. On prend $x = (x_j)_{j=1,\dots,n}$ avec $x_j = \frac{\bar{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}$ si $a_{i_0 j} \neq 0$ et $x_j = 0$ sinon. Alors $|x|_\infty = 1$ d'où $||A||_\infty \geq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ et le résultat annoncé.

$\bullet ||Ax||_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j| \Rightarrow ||A||_1 \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$

Soit j_0 tel que $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. On prend alors $x = (\delta_{jj_0})_{j=1,\ldots,n}$. Comme $||x||_1 = 1$, on a $||A||_1 \geq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ d'où le résultat voulu.

$\bullet ||A||_2^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2^2}{||x||_2^2} = \sup_{x \neq 0} \frac{x^* A^* A x}{||x||_2^2}$

A^*A est hermitienne donc diagonalisable dans une base orthonormale $\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{x^* A^* A x}{||x||_2^2} = \rho(A^*A)$. ■

Proposition 2.3
• *Si U est une matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (i.e $U^*U = UU^* = I_n$), alors $||A||_2 = ||UA||_2 = ||AU||_2 = ||UA^*U||_2$.*
• *Si A est une matrice normale (i.e $A^*A = AA^*$, donc par exemple si A est réelle symétrique ou complexe hermitienne), alors $||A||_2 = \rho(A)$.*
•*$||A||_2^2 = ||A^*A||_2 \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

2.2 Norme de Frobenius (ou euclidienne)

Définition 2.3 (Rappel de la décomposition en valeurs singulières (SVD))
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\exists P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaires ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou orthogonales ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) telles que Q^*AP est diagonale avec tous ses termes diagonaux réels positifs. Ils sont appelés valeurs singulières *de A. De plus, si A est une matrice normale, ses valeurs singulières sont les modules de ses valeurs propres.*

Définition 2.4 (Norme de Frobenius)
$||A||_F = \operatorname{tr}(A^*A) = \operatorname{tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = ||A^*||_F = \sum$ *carrés des valeurs singulières.*

Quelques propriétés de la norme de Frobenius :
- $||A||_2 \leq ||A||_F \leq \sqrt{n}||A||_2$ car $\rho(A^*A) \leq \operatorname{tr}(A^*A) \leq n\rho(A^*A)$.
- La trace est conservée par changement de base $\Rightarrow$ la norme de Frobenius aussi.

Proposition 2.4
La norme de Frobenius est une norme matricielle qui n'est pas subordonnée à une norme vectorielle (sauf si $n = 1$).

Preuve :
Cauchy-Schwarz $\Rightarrow ||AB||_F = \sum_{i,j} \left| \sum_k a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \sum_{i,j} \sum_k |a_{ik}|^2 \sum_l |b_{lj}|^2 = ||A||_F^2 ||B||_F^2$, donc $||.||_F$ est bien une norme matricielle.
Elle est non subordonnée car $||I_n||_F = \sqrt{n} \neq 1$. ■

Théorème 2.1 $||.||$ *norme matricielle* $\Rightarrow \rho(A) \leq ||A||$.

Preuve : Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. On peut trouver un vecteur $y \in \mathbb{K}^n$ tel que la matrice $B = x.y^* \neq 0$. On a alors :

$$||AB|| = ||Axy^*|| = ||(Ax)y^*|| = |\lambda|||B|| \leq ||A||||B|| \Rightarrow |\lambda| \leq ||A|| \; \forall \lambda \text{ valeur propre} \Rightarrow \rho(A) \leq ||A||$$

■

Théorème 2.2 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall \varepsilon > 0, \exists ||.||$ *norme matricielle subordonnée t.q.*$||A|| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Preuve : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists P$ t.q. $P^{-1}AP = T$ triangulaire supérieure.
Soit $\Lambda_\delta = \mathrm{Diag}(1, \delta, \ldots, \delta^{n-1})$.

$$(\Lambda_\delta^{-1} T \Lambda_\delta)_{ij} = (\Lambda_\delta)_{ii}^{-1} T_{ij} (\Lambda_\delta)_{jj} = \delta^{j-i} T_{ij}, \quad j \geq i$$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & T_{12} & \ldots & T_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T_{n-1\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda_\delta^{-1} T \Lambda_\delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta T_{12} & \ldots & \delta^{n-1} T_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta T_{n-1\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour $\varepsilon > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ t.q. $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} |\delta^{j-i} T_{ij}| \leq \varepsilon \quad \forall i \leq n-1$.
On construit alors une norme de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} ||.|| : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ B & \longmapsto & ||B|| = ||(P\Lambda_\delta)^{-1} T (P\Lambda_\delta)||_\infty \end{array}$$

Cette norme dépend de A et de ε. Elle vérifie bien $||A|| \leq \rho(A) + \varepsilon$ car $||C||_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |C_{ij}|$.

C'est une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $v \longmapsto ||(P\Lambda_\delta)^{-1} v||_\infty$. ■

Théorème 2.3 *Soient $||.||$ une norme matricielle subordonnée et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Si $||B|| < 1$, alors $(I + B)$ est inversible et $||(I + B)^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1 - ||B||}$.*
2. *Réciproquement, si $(I+B)$ est singulière, alors $||B|| \geq 1$ pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.*

Preuve : $(I + B)u = 0 \Rightarrow ||Bu|| = ||u||$
$||B|| < 1$ et $u \neq 0 \Rightarrow ||Bu|| < ||u||$
Donc $(I + B)u = 0 \Rightarrow u = 0$ d'où $(I + B)$ inversible.
$(I + B)^{-1}(I + B) = (I + B) - B \quad \Longrightarrow \quad (I + B)^{-1} = I - B(I + B)^{-1}$
$\Longrightarrow \quad ||(I + B)^{-1}|| \leq 1 + ||B||||(I + B)^{-1}|| \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \dfrac{1}{||(I + B)^{-1}||} + ||B||$
$\Longrightarrow \quad ||(I + B)^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1 - ||B||}$.
Réciproquement, $(I + B)$ singulière $\Longleftrightarrow -1$ valeur propre de $B \Longrightarrow ||B|| \geq \rho(B) \geq 1$. ■

3 Puissances d'une matrice

Définition 3.1 *On dit qu'une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tend vers 0 si $||A_k|| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour une norme matricielle.*

Remarque 3.1 *Toutes les normes étant équivalentes, cette convergence a lieu pour toutes les normes.*

Théorème 3.1 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une condition nécessaire et suffisante pour que $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 est que $\rho(A) < 1$.*

Preuve : $\rho(A^p) = (\rho(A))^p \leq ||A^p|| \quad \Longrightarrow \quad (\rho(A))^p \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho(A) < 1$.
Réciproquement :
si $\rho(A) < 1$, d'après le théorème 2.2, $\exists ||.||$ subordonnée telle que $||A|| \leq \rho(A) + \dfrac{1}{2}(1 - \rho(A)) < 1$.
$||A^p|| \leq ||A||^p \Longrightarrow ||A^p|| \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Théorème 3.2 *Pour toute norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,* $\quad \rho(A) = \lim\limits_{p\to\infty} ||A^p||^{1/p}$.

Preuve :
$\forall p > 0, (\rho(A))^p = \rho(A^p) \le ||A^p|| \quad \Longrightarrow \quad \rho(A) \le ||A^p||^{1/p} \quad \Longrightarrow \quad \rho(A) \le \liminf_{p\to\infty} ||A^p||^{1/p}$.
Pour $\varepsilon > 0$ on considère $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon}A$. On a $\rho(A_\varepsilon) < 1 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} A_\varepsilon^p = 0$,
donc $\exists N > 0$ t.q. $p \ge N \Rightarrow ||A_\varepsilon^p|| \le 1$, i.e. $||A^p|| \le (\rho(A)+\varepsilon)^p$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \limsup_{p\to\infty} ||A^p||^{1/p} \le \rho(A)+\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{p\to\infty} ||A^p||^{1/p} \le \rho(A)$$

■

Proposition 3.1 $\sum_{p=0}^{\infty} A^p$ *est convergente si et seulement si* $\rho(A) < 1$*. Alors,* $(I-A)^{-1} = \sum_p = 0^\infty A^p$

Preuve : D'après le théorème 2.2, $\exists ||.||$ subordonnée telle que $||A|| < 1$.
$\sum_{p=0}^{\infty} A^p$ est absolument convergente pour cette norme et on a

$$(I-A)\sum_{p=0}^{\infty} A^p = \lim_{N\to\infty} (I-A)\sum_{p=0}^{N} A^p = I - \lim_{N\to\infty} A^{N+1} = I.$$

Réciproquement : $\sum_{p=0}^{\infty} A^p$ convergente, donc $\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p$ converge pour toute λ valeur propre de A
$\Longrightarrow \quad |\lambda| < 1 \quad \forall\lambda$ valeur propre $\Longrightarrow \quad \rho(A) < 1$. ■

Corollaire 3.1 $(I+A)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A^p$

4 Conditionnement

Exemple. Sur cet exemple simple en apparence, on se rend compte qu'il y a parfois lieu de se méfier, même lorsque les matrices ont un bon aspect général...
On considère la matrice réelle, symétrique, définie positive suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

On a $\det(A) = 1$ et on peut calculer

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour le second membre $b = (32, 23, 33, 31)^T$, on peut calculer la solution du système linéaire $Ax = b$ et on trouve $x = (1, 1, 1, 1)^T$.

Si on perturbe maintenant ce système linéaire en ajoutant une "erreur" sur le second membre b, et que l'on cherche la solution du système $A\tilde{x} = \tilde{b}$ avec $\tilde{b} = b + \frac{1}{10}(1, -1, 1, -1)^T$, on trouve $\tilde{x} = (9.2, -12.6, 4.5, -1.1)$. Le rapport entre l'erreur relative sur b et l'erreur relative su x vaut plus de 2000. Autrement dit, les erreurs ont été amplifiées d'un facteur 2000 lors de la résolution de ce système.

De même, on peut calculer l'effet de petites variations sur les coefficients de A sur l'erreur de la solution x. On trouve aussi un facteur d'amplification de l'ordre de 1000.

La suite de ce chapitre va permettre de comprendre ce phénomène, qui est de la plus haute importance dans la perspective du calcul numérique.

Définition 4.1 *On appelle conditionnement d'une matrice inversible A la quantité* $\mathrm{cond}(A) = ||A||||A^{-1}||$ *où $||.||$ est une norme matricielle subordonnée. Si le conditionnement est calculé par rapport à la norme $||.||_p$, on le note* cond_p.

Motivation : on s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$. On suppose que A est inversible et que x est la solution de ce système.
1. Erreur numérique sur $b \longrightarrow$ erreur numérique sur x :
$Ax = b \Rightarrow ||b|| \leq ||A||||x|| \Rightarrow ||x|| \geq \dfrac{||b||}{||A||}$
Soit δb une erreur sur le second membre b. $A(x + \delta x) = b + \delta b \Rightarrow A\delta x = \delta b$
$\Rightarrow ||\delta x|| \leq ||A^{-1}||||\delta b|| \Rightarrow \dfrac{||\delta x||}{||x||} \leq \mathrm{cond}(A)\dfrac{||\delta b||}{||b||}$.
2. Erreur numérique sur $A \longrightarrow$ erreur numérique sur x :
$(A + \delta A)(x + \delta x) = b \Rightarrow A\delta x + \delta A(x + \delta x) = 0 \Rightarrow ||\delta x|| \leq ||A^{-1}||||\delta A||||x + \delta x||$ soit

$$\frac{||\delta x||}{||x + \delta x||} \leq ||A^{-1}||||\delta A|| = \mathrm{cond}(A)\frac{||\delta A||}{||A||}.$$

Proposition 4.1
1/ $\mathrm{cond}(A) \geq 1$.
2/ A unitaire (ou orthogonale) $\Rightarrow$ $\mathrm{cond}_2(A) = 1$. *3/ $||.||_2$ sur $\mathbb{C}^n$. $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire ($U^*U = I$), alors* $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(AU) = \mathrm{cond}_2(UA)$.
4/ $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1})$.
5/ $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(\alpha A) \forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
6/ $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$ *où $\mu_1(A)$ et $\mu_n(A)$ désignent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs singulières de A (i.e. la plus petite et la plus grande des racines carrées positives des valeurs propres de A^*A).*
7/ Si A est normale (par exemple symétrique), $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$ *où λ_1 et λ_n désignent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de A en valeur absolue.*

Preuve :
1/ $||A||||A^{-1}|| \geq ||AA^{-1}|| = ||I|| = 1$.
2/ A unitaire $\Rightarrow ||A||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(I)} = 1$.
3/ $\mathrm{cond}_2(AU) = ||AU||_2||U^*A^{-1}||_2 = \rho(U^*A^*AU)^{\frac{1}{2}}\rho((A^{-1})^*UU^*A^{-1})^{\frac{1}{2}} = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}}\rho((A^{-1})^*A^{-1})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{cond}_2(A)$.
6/ $||A||_2^2 = \rho(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A) = \mu_n^2(A)$
$||A^{-1}||_2^2 = \rho((A^{-1})^*A^{-1}) = \rho((A^{-1}A^{-1})^*) = \max_i \lambda_i((A^*A)^{-1}) = \dfrac{1}{\min_i \lambda_i(A^*A)} = \dfrac{1}{\mu_1(A)^2)}$.
7/ A normale $\Rightarrow ||A||_2 = \rho(A)$. ∎

5 Sensibilité d'un problème aux valeurs propres

Exemple. On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & \epsilon \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $(-1)^n(X^n - \epsilon)$: les valeurs propres sont nulles si $\epsilon = 0$ et ce sont les racines n-èmes de ϵ si $\epsilon \neq 0$. Si $n = 10$ et si $\epsilon = 10^{-10}$, les valeurs propres ont pour module 0.1. On voit donc qu'une perturbation de 10^{-10} d'un coefficient de la matrice entraîne des variations importantes des valeurs propres.

On note $\sigma(A)$ le spectre d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour tenter de comprendre la sensibilité des valeurs propres aux perturbations d'une matrice, on a le résultat

Théorème 5.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *diagonalisable, et* P *une matrice de changement de base telle que* $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$. *Soit* $\|.\|$ *une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\|MN\| \leq \|M\|\|N\| \quad \text{et } \|\mathrm{Diag}(\mu_1 \dots \mu_n)\| = \max_{i=1\dots n} |\mu_i|$$

alors pour toute perturbation δA *de* A*, on a*

$$\sigma(A + \delta A) \subset \cup_{i=1}^{n} D_i \tag{1}$$

et

$$D_i = \{\mu \in \mathbb{C};\ |\mu - \lambda_i| \leq \mathrm{cond}(P)\|\delta A\|\}. \tag{2}$$

Preuve : On sait que μ est valeur propre de $A + \delta A$ si et seulement si $A + \delta A - \mu I$ n'est pas inversible. En multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1}, ceci est équivalent à dire que $\mathrm{Diag}(\lambda_1 - \mu, \dots, \lambda_n - \mu) + P^{-1}\delta AP$ est singulière. Deux cas se présentent :

1. si $\mathrm{Diag}(\lambda_1 - \mu, \dots, \lambda_n - \mu)$ est singulière, alors $\mu \in D_i$ pour un indice $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. sinon, $I + \mathrm{Diag}((\lambda_1 - \mu)^{-1}, \dots, (\lambda_n - \mu)^{-1})P^{-1}\delta AP$ est singulière. Ceci implique que

   $$\|\mathrm{Diag}((\lambda_1 - \mu)^{-1}, \dots, (\lambda_n - \mu)^{-1})P^{-1}\delta AP\| \geq 1,$$

   autrement on pourrait construire un inverse avec une série. Les propriétés de la norme impliquent alors que

   $$\|\mathrm{Diag}((\lambda_1 - \mu)^{-1}, \dots, (\lambda_n - \mu)^{-1})\|\|P^{-1}\|\|\delta A\|\|P\| \geq 1,$$

   soit encore

   $$\max_i |\lambda_i - \mu|^{-1}\mathrm{cond}(P)\|\delta A\| \geq 1.$$

   On en déduit que

   $$\min_i |\lambda_i - \mu| \leq \mathrm{cond}(P)\|\delta A\|$$

■

Remarque 5.1 *La sensibilité d'un problème aux valeurs propres d'une matrice* A *diagonalisable par rapport aux perturbations dépend donc du conditionnement de la matrice de passage* P *et non pas de celui de* A.

Remarque 5.2 *Si* A *est normale, on sait que* A *est diagonalisable avec* P *unitaire. On a* $\mathrm{cond}_2(P) = 1$. *Dans ce cas les valeurs propres de* A *sont contenues dans des disques centrés aux valeurs propres de* A *et de rayon* $\|\delta A\|_2$.