E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 12 octobre 2009

Alg. T.D.1
Esp.Vect.-Matrices-Endomorphismes-Diagonalisation.

1

Considérons les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1,\ 0,\ 0);\ e_2(0,\ 1,\ 0);\ e_3 = (0,\ 0,\ 1) \\ f_1 = (1,\ 1,\ 1);\ f_2(1,\ 1,\ 0);\ f_3 = (1,\ 0,\ 0) \end{array} \right\}$$

i) Trouver la matrice de passage P de $\{e_i\}$ à $\{f_i\}$.

ii) Trouver la matrice de passage Q de $\{f_i\}$ à $\{e_i\}$.

iii) Vérifier que $Q = P^{-1}$.

iv) Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, $[v]_f = P^{-1}[v]_e$

v) Montrer que si $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$, alors

$$[T]_f = P^{-1}[T]_e P$$

vi) Soit $\mathcal{C}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions numériques et continuement différentiables, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit D l'opérateur différentiel :

$$D(f) = \frac{df}{dt}$$

Chacun des ensembles suivants constitue une base d'un sous espace (à préciser la dimension correspondante) de l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty$. Trouver la matrice associée à l'opérateur linéaire D dans chacune de ces bases :

$$\left\{ \begin{array}{c} a)\ \{\ \exp(t),\ \exp(2t),\ t\exp(2t)\}\quad b)\ \{\ sint,\ cost\ \} \\ \\ c)\ \{\exp(5t),\ t\exp(5t),\ t^2\exp(5t)\}\quad d)\ \{1,\ t,\ sin3t,\ cos3t\} \end{array} \right\}$$

2

i) Déterminer si les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants :

$$\begin{array}{c} (a)\ (1,\ -2,\ 1);\ (2,\ 1,\ -1);\ (7,\ -4,\ 1) \\ (b)\ (1,\ -3,\ 7);\ (2,\ 0,\ -6);\ (3,\ -1,\ -1);\ (2,\ 4,\ -5) \\ (c)\ (1,\ 2,\ -3);\ (1,\ -3,\ 2);\ (2,\ -1,\ 5) \\ (d)\ (2,\ -3,\ 7);\ (0,\ 0,\ 0);\ (3,\ -1,\ -4) \end{array}$$

ii) Soit V l'espace vectoriel des 2×2 matrices sur $\mathbb{R}$.

Déterminer si dans les deux cas suivants les matrices correspondantes sont linéairement indépendantes :

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

3

i) Pour chacune des matrices réelles symétriques suivantes A, trouver une matrice non singulière P telle que la matrice ${}^TPAP$ soit diagonale :

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}; \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

ii) Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vérifier si B est semblable à une matrice diagonale. Si oui trouver cette matrice diagonale.

4

i) Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

Trouver toutes les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de A et B, considérées comme :

a) des matrices sur le corps $\mathbb{R}$ et, b) sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

ii) Trouver toutes les valeurs propres et une base de l'espace propre de l'opérateur linéaire suivant :

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ avec } T(x, y, z) = (2x + y,\ y - z,\ 2y + 4z)$$

5

(i) Soit E un espace vectoriel, et soit T_r <u>la restriction</u> d'un endomorphisme T à un <u>sous espace $T-$ invariant</u> $W \subset E$; autrement dit :

$$\forall\, w \in W : \ T_r(w) = T(w)$$

Montrer que :

$$(a) \ \text{Pour tout polynôme } f(t),\ f(T_r)(w) = f(T)(w)$$

(b) Le polynôme minimal de T_r, divise le polynôme minimal de T.

(ii) Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où A et B sont des matrices carrées. Montrer que le polynôme minimal $m(t)$ de M est le plus petit commun multiple des polynômes minimaux m_A, m_B de A et B respectivement. Généraliser.

(iii) Trouver le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 19 octobre 2009

Alg. T.D.2
Endomorphismes-Diagonalisation-Formes Canoniques.

1

i) Montrer que les matrices A et A^T ont les mêmes valeurs propres ;
Donner un exemple où ces deux matrices ont différents vecteurs propres.

ii) Soient S et T deux opérateurs linéaires tels que :

$$ST = TS$$

et soit λ une valeur propre de T.
Si W_λ est le sous espace propre associé à λ, montrer que W_λ est invariant par S :

$$S(W_\lambda) \subset W_\lambda.$$

iii) Soient $A,\ B$ deux matrices carrées $N \times N$ sur $\mathbb{C}$ telles que :

$$a) \quad AB = BA\ ;\ b) A \text{ et } B \text{ sont toutes les deux diagonalisables.}$$

Montrer que A et B peuvent être simultanément diagonalisées c'est à dire qu'il existe une base de $\mathbb{C}^N$ dans laquelle A et B sont représentées par des matrices diagonales.

2

Déterminer toutes les formes canoniques de Jordan possibles pour les matrices dont le polynôme caractéristique $P(t)$ et le polynôme minimal $m(t)$ sont les suivants :

i)
$$P(t) = (t-2)^4(t-3)^2; \qquad m(t) = (t-2)^2(t-3)^2$$

ii)
$$P(t) = (t-7)^5; \qquad m(t) = (t-7)^2$$

iii)
$$P(t) = (t-2)^7; \qquad m(t) = (t-2)^3$$

iv)
$$P(t) = (t-3)^4(t-5)^4; \qquad m(t) = (t-3)^2(t-5)^2$$

3

i) Soit E un espace vectoriel de dimension 7 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme $T:\ E \rightarrow E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m(t) = (t^2+2)(t+3)^3.$$

Trouver toutes les formes canoniques rationnelles possibles pour T.

ii) Faire une étude analogue dans $\mathbb{R}^7$ pour les polynômes minimaux (associés aux endomorphismes f et g respectivement) suivants :

$$m_f(t) = (t^2 + 2t + 4)(t + 1)^2; \qquad m_g(t) = (t^2 + 1)(t - 2)^2$$

iii) Soit $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$, une matrice dont le polynôme caractéristique correspondant P_B, a la forme suivante :

$$P_B(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

(Vérifier que 1 est une racine de ce polynôme caractéristique.
En faisant des hypothèses sur le polynôme minimal $m_B(x)$, donner deux formes canoniques de Jordan pour B.

iv) Soit $C \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme minimal m_C a la forme suivante :

$$m_C(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 + 4)$$

Obtenir deux formes canoniques rationnelles possibles pour C.

4

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Montrer que : } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad A^3 = 0$$

Donc montrer que la matrice A est nilpotente d'indice 3.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 26 octobre 2009

Alg. T.D.3
(f. linéaires -bilinéaires- quadratiques-hermitiennes)

1

i) Considérons la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\{v_1 = (1,\ -1,\ 3);\ v_2 = (0,\ 1,\ -1);\ v_3 = (0,\ 3,\ -2)\}$$

Trouver la base duale correspondante : $\{\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3\}$.

ii) Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré $d \leq 1$, donc :

$$E = \{f(t) = a + bt;\ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Soient deux applications :

$$\phi_1 : E \to \mathbb{R},\ \phi_2 : E \to \mathbb{R}$$

définies par :

$$\phi_1(f(t)) = \int_0^1 f(t)dt\ ; \qquad \phi_2(f(t)) = \int_0^2 f(t)dt$$

Est-ce-que ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent à l'espace dual E^*?
Si oui, trouver la base $\{v_1,\ v_2\}$ de E qui est la base duale de $\{\phi_1,\ \phi_2\}$.

iii) Soit ϕ la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$, définie par : $\phi(x,y) = x - 2y$.
Pour chacune des applications linéaires suivantes T de R^2 trouver la transposée $T^t(\phi)(x,y)$:

$$(a)\ T(x,y) = (x,\ 0);$$

$$(b)\ T(x,y) = (y,\ x+y); \quad (c)\ T(x,y) = (2x - 3y,\ 5x + 2y).$$

2

i) Trouver la matrice symétrique associée à chacune des formes quadratiques suivantes :

$$\begin{array}{lc} a) & q(x,y,z) = 2x^2 - 8xy + y^2 - 16xz + 14yz + 5z^2 \\ b) & q(x,y,z) = x^2 + y^2 - xz \\ c) & q(x,y,z) = xy + y^2 + 4xz + z^2 \\ d) & q(x,y,z) = xy + yz \end{array}$$

ii) Utiliser la méthode de l'échelonnage pour réduire ces formes quadratiques en leurs formes canoniques.

iii) Utiliser la méthode des carrés de Gauss, pour réduire ces formes quadratiques en leurs formes canoniques.

3

i) Soient les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3 :\ x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y \in \mathbb{R}^3 :\ y = (y_1, y_2, y_3)$ et la forme bilinéaire suivante :

$$f(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3.$$

Donner une représentation matricielle de f.

ii)Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application suivante f, est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$:

$$f(X, Y) = X^t AY$$

.

4

i) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1-i & -2i \\ -1+i & 1 & i \\ 2i & -i & 2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier si A est une matrice hermitienne. Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet A comme représentation matricielle.

b) Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $H = C^*AC$, soit diagonale. Normaliser cette matrice.

ii) Faire une étude analogue pour la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 13 \end{pmatrix}$$

5

i) Vérifier si la matrice suivante est hermitienne (resp. réelle symétrique) :

$$(a)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

ii) Pour chaque matrice hermitienne (resp. réelle symétrique) trouver une forme hermitienne (resp. forme bilinéaire symétrique), qui admet la matrice correspondante comme représentation.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 2 novembre 2009

Alg. T.D.4
(f.hermitiennes- produit scalaire-normes-bases orthonormales)

1

i) Vérifier si la matrice suivante est hermitienne :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 2 & -i \\ 4+i & -i & 3 \end{pmatrix}.$$

ii) Si la matrice A est hermitienne (si elle n'est pas proposer une analogue B qui serait hermitienne et,) trouver une forme hermitienne, qui admet cette matrice comme représentation matricielle ; trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $H = C^*AC$, (ou $H = C^*BC$) soit diagonale.

2

i) Vérifier que l'expression suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

$$< u,\ v >= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + +3x_2y_2$$

où

$$u = (x_1,\ x_2),\ \ v = (y_1,\ y_2)$$

ii)= Trouver la norme de $v = (3,\ 4) \in \mathbb{R}^2$ par rapport :

a) au produit scalaire ordinaire,

b) au produit scalaire du i)

iii) Normaliser chacun des vecteurs suivants, dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$.

$$a)\ \ u = (2,\ 1,\ -1); \quad b)\ v = (\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{-1}{4})$$

iv) Pour un espace Euclidien , établir les propriétés suivantes de la norme :

a) Identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

b) Identité de polarisation :

$$< x,\ y >= \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

c) Relation de Pythagore :

$$\|xy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{si} \quad < x, y >= 0$$

v) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour tout espace préhilbertien.

vi) Soit E l' espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire suivant :

$$< f,\ g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Soit $f(t) = t + 2$ et $g(t) = t^2 - 2t - 3$.
Trouver : a) $< f, g >$ et, b) $\|f\|$.

3

i) Montrer que les applications suivantes $N_1,\ N_2,\ N_3$ de $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ définissent trois normes equivalentes sur $\mathbb{R}^k$:

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_k) \mapsto\ N_1(x) =\ \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$$

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_k) \mapsto\ N_2(x) =\ \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_k) \mapsto\ N_3(x) =\ sup\{|x_1|,\ |x_2|,\ \ldots |x_k|\}$$

ii) Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m,n))$. Montrer que pour tout couple de matrices $(A,B) \in\ (\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m,n))^2$ la trace $Tr(A^*B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m,n))$.

4

Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré $r \leq 2$ muni du produit scalaire :

$$< f,\ g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

i) Trouver une base du sous espace F orthogonal à $h(t) = 2t + 1$.

ii) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, à la base $1, t, t^2$ pour obtenir une base orthonormée de E.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 9 novembre 2009

Alg. T.D.5
(Op. normaux-Op.et matrices Unitaires

1

Soit T un opérateur normal sur un espace préhilbertien $(E, <, >)$. Démontrer que :

i) $\forall\, v \in\ E,\ T(v) = 0,$ si et seulement si $T^*(v) = 0$

ii) L'opérateur $T - \lambda I$ est un opérateur normal.

iii) Si $T(v) = \lambda v$ alors $T^*(v) = \overline{\lambda}\, v$;
donc tout vecteur propre de T, est aussi vecteur propre de T^*.

iv) Si,

$$T(v) = \lambda_1 v \text{ et } \quad T(w) = \lambda_2 w \quad \text{où} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$
$$\Rightarrow \qquad < v, w >= 0;$$

C'est à dire les vecteurs propres de T correspondant à des valeurs propres distinctes de T sont orthogonaux.

v) Déterminer laquelle des matrices suivantes est normale :

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$$

2

Soit la matrice : $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice U est unitaire. Est-elle hermitienne ? Est-elle normale ?

b) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, muni de la norme $\|v\|_2$ définie comme il suit, $\forall\, v \in \mathbb{C}^2$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |v_i|^2}.$$

Pourriez-vous définir le produit scalaire auquel correspond la norme précédente ?
Soit le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle $\|u\|_2$, et celle du vecteur transformé $U(u)$ où U est la matrice unitaire de la question a). Comparer les deux normes et justifier votre résultat par application d'un théorème du cours (avec démonstration).

3

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, muni de la norme $\|v\|_2$ définie comme il suit, $\forall\, v \in \mathbb{C}^n$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

Montrer que si $A = \{a_{il}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A, et si on considère la norme matricielle :

$$\|A\|_2 \equiv \sup_{v \neq \{0\}} \frac{\|A(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

alors :

i) Cette norme est invariante par transformations unitaires.

ii)
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2.$$

iii) Si $A = \{a_{il}\} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m,n))$, alors la norme matricielle $\|A\|_2$ n'est autre que la plus grande valeur singulière de la matrice A.

iv) Appliquer (ii) et (iii) pour une matrice A **unitaire**.

v) On considère deux nombres réels α, et β ; soit la matrice $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \exp(i\alpha)\cos\beta & \exp(-i\alpha)\sin\beta \\ -\exp(i\alpha)\sin\beta & \exp(-i\alpha)\cos\beta \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice U est unitaire.

Si oui, appliquer les résultats précédents.

4

a) **Localisation des valeurs propres**

Donner une démonsration du théorème suivant :

Théorème 0.1 *(Gerschgorin - Hadamard)*

*Soit $A = \{a_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit les "**disques de Hadamard**" sur le plan $\mathbb{C}$ par :*

$$D_\ell = \left\{ z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - a_{\ell\ell}| \leq \sum_{j \neq \ell} |a_{\ell j}| \right\}$$

$$\Rightarrow Sp(A) \subset \bigcup_{\ell=1}^{n} D_\ell$$

b) Pour la matrice A Quel est le centre et le rayon du "cercle" (intervalle) où se trouve d'après le théorème toutes les valeurs propres ?

Pour les matrices B et C trouver les valeurs propres des matrices $B;\ C$ suivantes, ensuite appliquer le théorème pour constater leur localisation d' après les disques de Hadamard.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$