**E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**
**1re Année Ingénieurs**
ALGEBRE
**Devoir surveillé** $n^0$ 1
**donné le 5 décembre 2011** ( Durée 2h.)
Aucun document (ni calculatrice) autorisé.

## I (4 *Pts.*)

**i)** Déterminer toutes les formes canoniques de **Jordan** possibles pour la matrice réelle $A$ dont le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et le polynôme minimal correspondants $m_A(t)$ sont les suivants :

$$P_A(t) = (t^2 - 2t + 1)^3\,(t^2 - 1)^4;$$
$$m_A(t) = (t^2 - 2t + 1)^2\,(t^2 - 1)^3.$$

**ii)** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 10 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme $f : E \to E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m_f(t) = (t^2 + t + 1)^2 (t^2 + 3)^2.$$

Trouver toutes les formes **rationnelles canoniques** possibles pour $f$ (et sa représentation matricielle).

## II (10 *Pts.*)

Sur l'espace vectoriel produit $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ on définit l'application suivante $f(X, Y)$ :

$\forall\,(X,\,Y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$
(avec $X = \{x_i \in \mathbb{C}; \forall i = 1,2,3\}$ et $Y = \{y_i \in \mathbb{C}; \forall i = 1,2,3\}$) :

$$f(X,Y) = \sum_{i=1}^{3} x_i \bar{y}_i$$

(i) Montrer que l'application $f$ est un **"bon produit scalaire "** sur $\mathbb{C}^3$. Déterminer la **norme vectorielle** associée.

(ii) Soit l'espace vectoriel préhilbertien $(\mathbb{C}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ muni du produit scalaire de la question (i). Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) La matrice $A$ est-elle hermitienne ?
  Sur cet espace $(\mathbb{C}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ déterminer l'opérateur $T$ qui admet comme représentation matricielle la matrice $A$.
- (b) En utilisant le produit scalaire du (i), et la définition de l'adjoint d'un opérateur dans les espaces préhilbertiens, déterminer l'opérateur adjoint $T^*$ de l'opérateur $T$, par son action sur un vecteur quelconque $X \in \mathbb{C}^3$.
  Que peut-on conclure pour ces deux opérateurs $T$ et $T^*$ ?
- (c) Donner la représentation matricielle correspondante $\tilde{A}$ de $T^*$. Est-elle hermitienne ? Quelle est sa relation avec $A$ ?
  Commenter votre résultat par rapport au (a).

(iii) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ on définit la **norme matricielle** subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ par :

$$\|M\|_2 \equiv \sup_{v \neq 0} \frac{\|M(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

- (a) Déterminer la matrice $B = AA^*$.
  $B$ est-elle **hermitienne ?** est-elle **normale ?** est elle **unitaire** ?
- (b)
  1. Trouver les **valeurs propres** de $B$.
  2. Appliquer le théorème de **Gerschgorin - Hadamard** pour constater leur **localisation d'après les disques de Hadamard**. Faire le graphique et interpréter votre résultat.
  3. Déterminer le **rayon spectral** de $B$. En déduire la norme matricielle $\|A\|_2$ de la matrice du ii) (Utilisation d'un théorème du cours **sans** démonstration).
- (c) Déterminer la matrice $\tilde{B} = A^*A$.
  $\tilde{B}$ est-elle **hermitienne ?** est-elle **normale ?** est elle **unitaire** ?
- (d)
  1. Trouver les **valeurs propres** de $\tilde{B}$ .
  2. Appliquer le théorème de **Gerschgorin - Hadamard** pour constater leur **localisation d' après les disques de Hadamard**. Faire le graphique et interpréter votre résultat.
  3. Déterminer le **rayon spectral** de $\tilde{B}$. En déduire la norme matricielle $\|A^*\|_2$ de la matrice adjointe du ii) (Utilisation d'un théorème du cours **sans** démonstration).
- (e) Commenter vos résultats pour les normes matricielles $\|A\|_2$ et $\|A^*\|_2$. Sont ils cohérents avec le théorème du cours que vous avez appliqué ?
- (f) Trouver une matrice non singulière $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que la matrice : $C^*MC = D$ soit diagonale avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice **hermitienne** suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## III (6 *Pts.*)

- (a) Soit la matrice $V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ :

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi} + e^{-i\phi} & -i(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) & 0 \\ i(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) & e^{i\phi} + e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Vérifier si la matrice $V$ est **Unitaire**. Est-elle **Hermitienne** ? est elle **Orthogonale** ? est-elle **Normale** ?
- (b) On considère l'espace vectoriel unitaire $(\mathbb{C}^3 \langle\ ,\ \rangle)$ muni du produit scalaire de la question (i) du II, et sa norme associée, $\|.\|_2$ . On considère le vecteur $u \in \mathbb{C}^3$

suivant :

$$u = \begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \\ \\ 0 \\ \\ \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle de ce vecteur $u$ particulier, et du vecteur transformé $V(u)$ (avec $V$ la matrice de la question (a)). Comparer les deux normes. En supposant que $V$ est unitaire justifier votre résultat par application d'un théorème. **Donner la démonstration de ce théorème.**

- (c) En utilisant la **norme matricielle** subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ donnée auparavant (voir **(iii) du II** : trouver la norme matricielle de la matrice $V$ de la question (a) ? justifier votre réponse.
- (d) Quelle est la norme matricielle : de la matrice

$$\|V^*AV\|_2?$$

Justifier votre résultat par application d'un théorème (**sans démonstration**).