E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
ALGEBRE
Devoir surveillé n^0 1a (Rattrapage)
donné le 3 mars 2014 (Durée 2h.)
Tout document, calculatrices, téléphones portables, sont interdits.

I (5 $Pts.$)

i) Déterminer toutes les formes canoniques de **Jordan** possibles pour la matrice réelle A dont le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et le polynôme minimal $m_A(t)$ correspondants sont les suivants :

$$P_A(t) = (t^2 - 2t + 1)^3\,(t^2 - 1)^4$$
$$m_A(t) = (t^2 - 2t + 1)^2(t^2 - 1)^4.$$

ii) Soit E un espace vectoriel de dimension 10 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme $f : E \to E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m_f(t) = (t^2 + t + 1)^2(t^2 + 3)^2.$$

Trouver toutes les formes **rationnelles canoniques** possibles pour la représentation matricielle B_f de f.

II (10 $Pts.$)

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à coefficients complexes suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit f l'application définie par :

$$f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}$$
$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i \bar{y}_i$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que f définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$.
En déduire la norme vectorielle associée a ce produit scalaire. Quelle est la relation de f avec le produit scalaire usuel ?

b) La matrice A est-elle Hermitienne ?

c) Appelons aussi A l'opérateur qui admet la matrice A comme représentation matricielle. En utilisant le produit scalaire f déterminer l'opérateur adjoint A^* de A.

2. a) Vérifier si la matrice AA^* est normale et hermitienne. Déterminer les valeurs propres de AA^* et en déduire le rayon spectral correspondant.

   b) Enoncer et démontrer le théorème de **Gerschgorin - Hadamard**

   c) Appliquer ce théorème à la matrice AA^* pour constater la **localisation** de ses valeurs propres (trouvées précédemment au a) à l'intérieur de l'union des disques de Hadamard. Faire le graphique et interpréter votre résultat.

3. a) Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ on définit la **norme matricielle** subordonnée à la norme vectorielle (issue du produit scalaire usuel) $\|v\|_2$ par :

$$\|B\|_2 \equiv \sup_{v \neq 0} \frac{\|B(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

   Déterminer la norme matricielle $\|A\|_2$ en termes du rayon spectral de AA^* trouvé dans 2).
   (Utilisation d'un théorème du cours **sans** démonstration).

   b) Si U et V sont deux opérateurs unitaires donner la valeur de la norme matricielle $\|U^* AV\|_2$. Justifier votre réponse en **donnant la démonstration** de la conservation des normes matricielles par transformation unitaire.

III (5 *Pts.*) Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré $d \leq 2$, donc :

$$E = \{P(t) = a + bt + ct^2;\ \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On définit une application g de E^2 dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} g :\ & E \times E \mapsto E \\ & g(P, Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1) \end{aligned}$$

a) Montrer que g définit un produit scalaire sur E^2 et en déduire la norme associée.

b) Soit F un sous espace vectoriel de E orthogonal à $Q(t) = 2t$. Trouver une base de F.

c) Trouver une base orthonormée de E, en utilisant le procédé de Gramm-Schmidt.