E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
ALGEBRE
Devoir surveillé n^0 1
donné le 13 décembre 2010 (Durée 2h.)
Aucun document (ni calculatrice) autorisé.

I (5 *Pts.*)

i) Déterminer toutes les formes canoniques de **Jordan** possibles pour la matrice réelle A dont le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et le polynôme minimal correspondants $m_A(t)$ sont les suivants :

$$P_A(t) = (t^2 - 2\sqrt{5}\,t + 5)^3\,(t^2 - 2t + 1)^2;$$
$$m_A(t) = (t^2 - 2\sqrt{5}\,t + 5)^2\,(t^2 - 2t + 1)^2.$$

ii) Soit E un espace vectoriel de dimension 14 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme $f : E \to E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m_f(t) = (t^2 + 1)(t^2 + \sqrt{2})^2(t^2 + \sqrt{3})^3.$$

Trouver toutes les formes **rationnelles canoniques** possibles pour f (et sa représentation matricielle).

II (8 *Pts.*)

Sur l'espace vectoriel produit $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$ on définit l'application suivante $f(X, Y)$:

$\forall\,(X,\,Y) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$
(avec $X = \{x_i \in \mathbb{C}; \forall i = 1, 2, 3, 4\}$ et $Y = \{y_i \in \mathbb{C}; \forall i = 1, 2, 3, 4\}$) :

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^{4} x_i \bar{y}_i$$

(i) Montrer que l'application f est un **"bon produit scalaire "** sur $\mathbb{C}^4$. Déterminer la **norme vectorielle** associée.

(ii) Soit l'espace vectoriel préhilbertien $(\mathbb{C}^4, \langle\ ,\ \rangle)$ muni du produit scalaire de la question (i).

Sur cet espace on définit l'opérateur T suivant :

$\forall\, X = \{x_1; x_2; x_3; x_4\} \in \mathbb{C}^4,\ \ T(x_1; x_2; x_3; x_4) = Y = \{y_1; y_2; y_3; y_4\}$
avec : $y_1 = x_1 - ix_3;\ y_2 = x_2;\ y_3 = x_3 + ix_1;\ y_4 = x_4$

– (a) En utilisant le produit scalaire du (i), et la définition de l'adjoint d'un opérateur dans les espaces préhilbertiens, déterminer l'opérateur adjoint T^* de l'opérateur T, par son action sur un vecteur quelconque $X \in \mathbb{C}^4$.
Que peut-on conclure pour ces deux opérateurs T et T^* ?

– (b) Donner les deux représentations matricielles correspondantes A de T et B de T^*. Sont-elles hermitiennes ? Commenter votre résultat par rapport au (a).

– (c) Trouver une forme **quadratique hermitienne** qui admet A comme représentation matricielle.
Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $H = C^*AC$, soit diagonale. Vérifier votre résultat.
Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.

iii

- (a) Soit la matrice $V \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$:

$$V = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice V est **Unitaire**. Est-elle Hermitienne ? est elle **Orthogonale** ? est-elle **Normale** ?

- (b) On considère l'espace vectoriel unitaire $(\mathbb{C}^4, \langle\, ,\, \rangle)$ muni du produit scalaire de la question (i), et sa norme associée, $\|v\|_2$. On considère le vecteur $u \in \mathbb{C}^4$ suivant :

$$u = \begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle de ce vecteur u particulier, et du vecteur transformé $V(u)$ (avec V la matrice de la question (a)). Comparer les deux normes. En supposant que V est unitaire justifier votre résultat par application d'un théorème. **Donner la démonstration de ce théorème.**

- (c) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,m)$ on définit la **norme matricielle** subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ par :

$$\|M\|_2 \equiv \sup_{v \neq 0} \frac{\|M(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

Quelle est la norme matricielle de la matrice V de la question (a) ? justifier votre réponse.

III (7 *Pts.*)

(i)

Soit la matrice $\tilde{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $\quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i\sqrt{5} \\ 0 & -i\sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$;

Vérifier si $\tilde{A}$ est une matrice hermitienne, calculer ses valeurs propres et appliquer le théorème de **Gerschgorin - Hadamard** pour constater leur **localisation d' après les disques de Hadamard**. Faire le graphique et interpréter votre résultat.

(ii)

Soit $\quad B \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2,3)$: $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 1 & -1 & i \end{pmatrix}$;

- (a) Déterminer la matrice $C = BB^*$. C est-elle **hermitienne ?**
- (b)Trouver les **valeurs propres** de C et son **rayon spectral**. En déduire $\|B\|_2$ (Utilisation d'un théorème du cours **sans** démonstration).