DS Algèbre - Janvier 2013

Titre de la note 11/02/2013

I i) $P_A(t) = \left(\left(t-4\right)^2\right)^3 \left(\left(t+\sqrt{2}\right)^2\right)^2 = (t-4)^6 \; (t+\sqrt{2})^4$

$\Rightarrow$ valeurs propres de A : $\lambda_1 = 4$ d'ordre 6, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ d'ordre 4

A matrice d'ordre 10 puisque degré $P_A = 10$

$m_A(t) = (t-4)^4 \; (t+\sqrt{2})^4$

matrices de Jordan correspondant à λ_1 :

$J_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 4 \end{bmatrix}$ d'ordre 4 $\qquad J_{1i} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}$ d'ordre $i \leq 4$

matrices de Jordan correspondant à λ_2 :

$J_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ d'ordre 4 $\qquad J_{2i} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ d'ordre $i \leq 4$

$\Rightarrow$ formes canoniques de Jordan possibles pour A

$$\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & \\ & & J_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & \\ & & J_2 \end{bmatrix}$$

ii) Puisque $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}[E]$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de valeurs propres réelles (racines de $P_f(t) = 0$), Il n'existe aucune forme canonique de Jordan possible pour f.

formes rationnelles canoniques

$$m_f(t) = P_1(t)\,(P_2(t))^2\,(P_3(t))^3 \quad \text{avec } P_1(t) = t^2+36,\; P_2(t) = t^2+2$$
$$P_3(t) = t^2+1$$

diviseurs élémentaires de f :

$$P_1(t)^{n_{11}} = P_1(t) = t^2+36$$

$$P_2(t)^{n_{21}} = (P_2(t))^2 = t^4+4t^2+4$$

$$P_2(t)^{n_{22}} = P_2(t) = t^2+2$$

$$P_3(t)^{n_{31}} = (P_3(t))^3 = t^6+3t^4+3t^2+1 \; ; \; P_3(t)^{n_{32}} = P_3(t)^2 = t^4+2t^2+1 \; ; \; P_3(t)^{n_{33}} = P_3(t) = t^2+1$$

$$C_{11} = C(t^2+36) = \begin{pmatrix} 0 & -36 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{21} = C(t^4+4t^2+4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{22} = C(t^2+2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{31} = C(t^6+3t^4+3t^2+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{32} = C(t^4+4t^2+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad C_{33} = C(t^2+1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Représentations matricielles possibles pour f :</u>

$$\begin{pmatrix} C_{11} & & & 0 \\ & C_{21} & & \\ & & C_{22} & \\ 0 & & & C_{31} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} C_{11} & & & 0 \\ & C_{21} & & \\ & & C_{31} & \\ 0 & & & C_{33} \end{pmatrix}$$

II

i) $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}^3$ car

$$\langle \lambda X_1 + \mu X_2 , Y \rangle = \lambda \langle X_1 , Y \rangle + \mu \langle X_2 , Y \rangle$$

$$\langle Y , X \rangle = \overline{\langle X , Y \rangle}$$

$$\langle X , X \rangle = \sum_{i=1}^{3} |x_i|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle X , X \rangle = 0 \iff X = 0$$

ii) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - i x_2 , i x_1 , x_3)$

a) définition de T^* :

$$\langle TX , Y \rangle = \langle X , T^* Y \rangle$$

$$\langle TX , Y \rangle = (x_1 - i x_2)\overline{y_1} + i x_1 \overline{y_2} + x_3 \overline{y_3}$$

$$= x_1 (\overline{y_1} + i \overline{y_2}) - x_2 i \overline{y_1} + x_3 \overline{y_3}$$

$$\Rightarrow T^* Y = \left(\overline{\overline{y_1} + i \overline{y_2}} , \overline{-i \overline{y_1}} , \overline{\overline{y_3}} \right) = (y_1 - i y_2 , i y_1 , y_3)$$

$\Rightarrow \underline{T^* = T} \Rightarrow$ <u>T est hermitien</u>

b) $T(e_1) = (1, i, 0)$ avec $e_1 = (1,0,0)$

$T(e_2) = (-i, 0, 0)$ " $e_2 = (0,1,0)$

$T(e_3) = (0,0,1) = e_3$

$$\Rightarrow A = B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \overline{{}^tA} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow A$ est hermitienne, ce qui correspond au fait que c'est la matrice de l'opérateur hermitien T

c) forme quadratique hermitienne qui admet A comme représentation matricielle :

$$^tX A \overline{X} = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_1} - i\overline{x_2} \\ i\overline{x_1} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix}$$

$$= x_1(\overline{x_1} - i\overline{x_2}) + i x_2 \overline{x_1} + x_3 \overline{x_3}$$

$$= |x_1|^2 + |x_3|^2 + i(x_2\overline{x_1} - x_1\overline{x_2})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L'_1 \leftarrow L_1$

$L'_2 \leftarrow -i L_1 + L_2$

$L'_3 \leftarrow L_3$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$C'_1 \leftarrow C_1$$
$$C'_2 \leftarrow i C_1 + C_2$$
$$C'_3 \leftarrow C_3$$

$$\Rightarrow A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= H$$

$$\Rightarrow \quad H = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^*} A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on vérifie. $\quad AC = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow C^* A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H$$

III) V et A sont hermitiennes car $V^* = V$ et $A^* = A$

$\Rightarrow$ elles sont normales car $V^* V = V^2 = V V^*$ et $A^* A = A^2 = A A^*$

V unitaire $\Leftrightarrow V V^* = V^2 = I$

$$V^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\Rightarrow$ V est unitaire

A unitaire $\Leftrightarrow A A^* = A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x & \\ i & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \neq I$$

$\Rightarrow$ <u>A n'est pas unitaire</u>

A et V étant à coefficients complexes non réels ne sont pas orthogonales

ii) $\|u\|_2^2 = \langle u, u \rangle = \frac{i(-i)}{3} - \frac{i\,i}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \|u\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$V(u) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{(1+i)(-i)}{3} \\ \frac{i}{3} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \|V(u)\|_2^2 = \frac{i(-i)}{3} + \frac{(1-i)(1+i)}{3} - \frac{i^2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \|V(u)\|_2 = \|u\|_2 = \sqrt{2/3}$$

Puisque V est unitaire, on a

$$\|V(u)\|_2^2 = \langle V(u), V(u)\rangle = \langle u, V^*V(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|_2^2$$

Une matrice unitaire conserve la norme

iii) a) $\forall v \in \mathbb{C}^3$, $\|V(v)\|_2 = \|v\|_2$ puisque V est unitaire (cf ii))

$$\Rightarrow \boxed{\|V\|_2 = 1}$$

b) $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda) + i^2\right]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1)$$

$$= (1-\lambda)\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right) = (1-\lambda)\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ valeurs propres de A : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$A^*A = A^2$ puisque A est hermitienne

$\Rightarrow$ valeurs propres de A^*A : $\lambda_1^2 = 1$, λ_2^2, λ_3^2

c) Puisque A^*A est hermitienne, il existe une base orthonormée de vecteurs propres $\{e_1, e_2, e_3\}$ dans laquelle elle est représentée par la matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \lambda_2^2 & \\ 0 & & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$. Soit $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \in \mathbb{C}^3$

$$\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{3} |v_i|^2$$

$$\|Av\|_2^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^*Av \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{3} v_i \langle e_i, \sum_{j=1}^{3} v_j \underbrace{A^*A e_j}_{= \lambda_j^2 e_j} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{3} v_i^2 \lambda_i^2 \quad \text{puisque } \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ pour } i \neq j$$

Soit $\lambda_M^2 = \rho(A^*A) = \sup_i \lambda_i^2$

Pour $v \neq 0$ $\quad \dfrac{\|Av\|_2^2}{\|v\|_2^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} v_i^2 \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^{3} v_i^2} \leq \lambda_M^2 \dfrac{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}{\sum_{i=1}^{3} v_i^2} = \lambda_M^2 = \rho(A^*A)$

$$\Rightarrow \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_2^2}{\|v\|_2^2} \leq \rho(A^*A)$$

Par ailleurs, si v est un vecteur propre associé à λ_M^2 on a

$\|Av\|_2^2 = \langle v, A^*Av \rangle = \lambda_M^2 \|v\|_2^2 \quad \Rightarrow \dfrac{\|Av\|_2^2}{\|v\|_2^2} = \lambda_M^2$

$$\Rightarrow \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_2^2}{\|v\|_2^2} \geq \rho(A^*A) \qquad \Rightarrow \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_2^2}{\|v\|_2^2} = \rho(A^*A)$$

d'où $\quad \|A\|_2 = \sup_{v \neq 0} \dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$

d) $\rho(A^*A) = \rho(A^2) = \lambda_3^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} \Rightarrow \boxed{\|A\|_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

e) Soit U unitaire.

et f) La norme matricielle est invariante par transformation unitaire $\Rightarrow \|U^*AU\|_2 = \|A\|_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Démonstration : $\|U^*AU\|_2 = \sup_{v \neq 0} \frac{\|U^*AU(v)\|_2}{\|v\|_2}$

U^* unitaire conserve la norme $\Rightarrow \|U^*AU(v)\|_2 = \|AU(v)\|_2$

U^* unitaire $\Rightarrow U^*U = I \Rightarrow \|v\|_2 = \|U^*Uv\|_2 = \|Uv\|_2$

$\Rightarrow \|U^*AU\|_2 = \sup_{v \neq 0} \frac{\|AU(v)\|_2}{\|Uv\|_2}$

maintenant $\{w = U(v)\ ;\ v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}\} = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ car U bijective

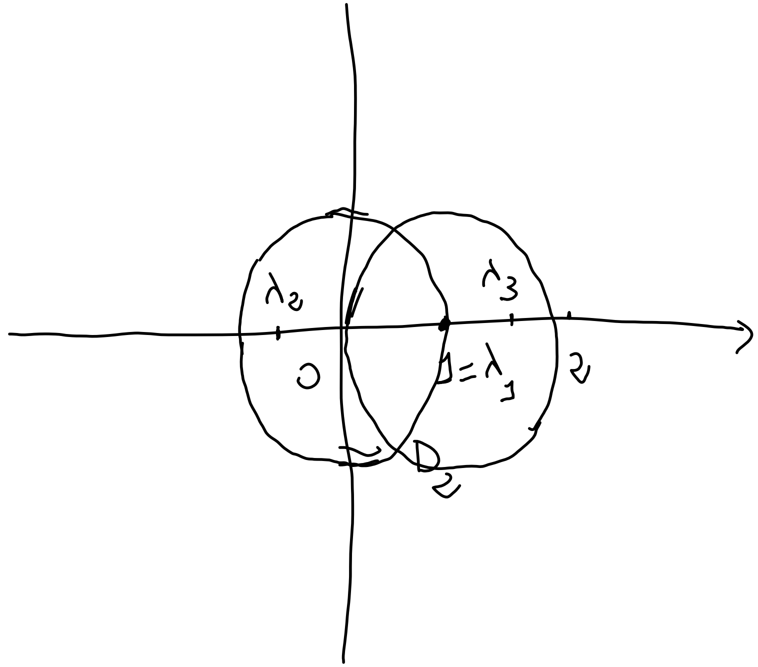
$$\Rightarrow \|U^* A U\|_2 = \sup_{w \neq 0} \frac{\|Aw\|_2}{\|w\|_2} = \|A\|_2$$

(iv) Disques de Hadamard :

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 0\} = \{1\}$$



$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx \frac{1 - 2{,}24}{2} \approx -\frac{1{,}24}{2} \simeq -0{,}62$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1 + 0{,}62$$

On a bien : $Sp(A) \subset \bigcup_{l=1}^{3} D_l$ (Th. de Gerschgorin - Hadamard