E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Devoir surveillé n° 1 (Algèbre)
donné le 8 novembre 2005
(Durée 2h.)

I (7 *Pts.*)

i) Déterminer toutes les formes canoniques de Jordan possibles pour la matrice réelle A dont le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et le polynôme minimal $m_A(t)$ sont les suivants :

$$P_A(t) = (t^2+4t+4)^2(t^2-6t+9)^2; \qquad m_A(t) = (t^2+4t+4)(t^2-6t+9)$$

ii) Soit E un espace vectoriel de dimension 12 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme $f : E \to E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m_f(t) = (t^2+3)^2(t^2+2)^3.$$

Trouver toutes les formes canoniques rationnelles possibles pour f.

iii) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & -1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix};$$

a) Vérifier si A est une matrice hermitienne. Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet A comme représentation matricielle.

b) Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $H = C^*AC$, soit diagonale. Vérifier votre résultat.
Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.

II (6 *Pts.*)

Optimiser par la méthode géometrique et par la méthode (des tableaux) du simplexe :

$$\max(Z = x_1 + 2x_2)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} 3x_1 - x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$3x_1 - x_2 = 0$

$x_1 + 2x_2 = 0$

III (7 *Pts.*)

Soit la matrice : $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice U est unitaire. Est-elle hermitienne ? Est-elle normale ?

b) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, muni de la norme $\|v\|_2$ définie comme il suit, $\forall\, v \in \mathbb{C}^2$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |v_i|^2}.$$

Pourriez-vous définir le produit scalaire auquel correspond la norme précédente ?

Soit le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle $\|u\|_2$, et celle du vecteur transformé $U(u)$ où U est la matrice unitaire de la question a). Comparer les deux normes et justifier votre résultat par application d'un théorème du cours (avec démonstration).

c)

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on définit la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ par :

$$\|M\|_2 \equiv \sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|M(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice B est hermitienne. Est-elle Normale ?

d) Par application d'un théorème du cours trouver la norme matricielle $\|B\|_2$. Connaissez vous la valeur du rapport

$$\frac{\|B\|_2}{\|U^*BU\|_2} \ ?$$

Justifier votre réponse.

(Application du théorème correspondant avec démonstration.)

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Devoir surveillé n^0 1 (Algèbre)
donné le 30 novembre 2006
(Durée 2h.)

I (7 *Pts.*)

i) Déterminer toutes les formes canoniques de Jordan possibles pour la matrice réelle A dont le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et le polynôme minimal $m_A(t)$ sont les suivants :

$$P_A(t) = (t^2-6t+9)^2(t+1)^3(t+2)^3; \qquad m_A(t) = (t^2-6t+9)(t+1)^2(t+2)$$

ii) Soit E un espace vectoriel de dimension 14 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme $f : E \to E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m_f(t) = (t^2+1)^3(t^2+3)^2.$$

Trouver toutes les formes canoniques rationnelles possibles pour f.

iii) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & -1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix};$$

a)

Vérifier si A est une matrice hermitienne. Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet A comme représentation matricielle.

b)

Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $D = C^*AC$, soit diagonale. Vérifier votre résultat (donner le détail de la vérification). Votre nouvelle matrice D est-elle hermitienne ?

Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet D comme représentation matricielle.

II (6 *Pts.*)

Optimiser par la méthode géométrique et par la méthode (des tableaux) du simplexe :

$$\max(Z = -2x_1 + x_2)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

III (7 *Pts.*)

a) On considère deux nombres réels α, et β ; soit la matrice $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \exp(-i\alpha)\cos\beta & -\exp(-i\alpha)\sin\beta \\ \exp(i\alpha)\sin\beta & \exp(i\alpha)\cos\beta \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice U est unitaire.

b) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, muni de la norme $\|.\|_2$ définie comme il suit, $\forall\, v \in \mathbb{C}^2$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |v_i|^2}$$

Pourriez-vous définir le produit scalaire auquel correspond la norme précédente ? Justifier votre réponse.

c)

Pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on définit la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ par :

$$\|N\|_2 \equiv \sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|N(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

1. En supposant que la matrice U est unitaire, soit une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ quelconque, et un vecteur $u \in \mathbb{C}^2$. Par application d'un théorème, donner la valeur du rapport des normes matricielles $\|M\|_2$ et $\|U^*MU\|_2$ et des normes vectorielles $\|u\|_2$ et $\|Uu\|_2$:

$$\frac{\|M\|_2}{\|U^*MU\|_2} = 1 \qquad \frac{\|u\|_2}{\|Uu\|_2} = 1$$

Justifier votre réponse.

(Application du théorème correspondant avec démonstration .)

2. Quelle est la norme matricielle de la matrice U de la question $a)$ dans le cas où elle serait unitaire ? Justifier votre réponse

Th de [illegible] du produit scalaire !

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Devoir surveillé n° 1 (Algèbre)
donné le 8 novembre 2005
(Durée 2h.)

I (7 *Pts.*)

i) Déterminer toutes les formes canoniques de Jordan possibles pour la matrice réelle A dont le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et le polynôme minimal $m_A(t)$ sont les suivants :

$$P_A(t) = (t^2+4t+4)^2(t^2-6t+9)^2; \qquad m_A(t) = (t^2+4t+4)(t^2-6t+9)$$

ii) Soit E un espace vectoriel de dimension 12 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme $f : E \to E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m_f(t) = (t^2+3)^2(t^2+2)^3.$$

Trouver toutes les formes canoniques rationnelles possibles pour f.

iii) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & -1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix};$$

a) Vérifier si A est une matrice hermitienne. Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet A comme représentation matricielle.

b) Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $H = C^*AC$, soit diagonale. Vérifier votre résultat.
Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.

II (6 *Pts.*)

Optimiser par la méthode géométrique et par la méthode (des tableaux) du simplexe :

$$\max(Z = x_1 + 2x_2)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} 3x_1 - x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

III (7 *Pts.*)

Soit la matrice : $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice U est unitaire. Est-elle hermitienne ? Est-elle normale ?

b) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, muni de la norme $\|v\|_2$ définie comme il suit, $\forall\, v \in \mathbb{C}^2$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |v_i|^2}.$$

Pourriez-vous définir le produit scalaire auquel correspond la norme précédente ?

Soit le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle $\|u\|_2$, et celle du vecteur transformé $U(u)$ où U est la matrice unitaire de la question a). Comparer les deux normes et justifier votre résultat par application d'un théorème du cours (avec démonstration).

c)

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on définit la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ par :

$$\|M\|_2 \equiv \sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|M(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice B est hermitienne. Est-elle Normale ?

d) Par application d'un théorème du cours trouver la norme matricielle $\|B\|_2$. Connaissez vous la valeur du rapport

$$\frac{\|B\|_2}{\|U^* BU\|_2} \ ?$$

Justifier votre réponse.

(Application du théorème correspondant avec démonstration.)

(A)

Benoît GRIMAUD
Ing 1

Mardi 8 novembre 2

D S Algebre 2
feuille 1/3

Ex n°1 → 7/7
Ex n°2 6/6
Ex n°3 6/7

19/20

Exercice n° 1.

$P_A(t) = (t^2 + 4t + 4)^2 (t^2 - 6t + 9)^2$
$m_A(t) = (t^2 + 4t + 4) \ (t^2 - 6t + 9)$

d'où $P_A(t) = (t+2)^4 \ (t-3)^4$
$m_A(t) = (t+2)^2 (t-3)^2$

d'où $J_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & & & (0) \\ & \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & & \\ (0) & & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

✓

$$J_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & & & & (0) \\ & (-2) & & & \\ & & (-2) & & \\ & (0) & & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \\ & & & & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2

$$J_3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & & & & & (0) \\ & (-2) & & & & \\ & & (-2) & & & \\ & (0) & & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & & \\ & & & & (3) & \\ & & & & & (3) \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & & & & (0) \\ & \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & & & \\ (0) & & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & & \\ & & & (3) & \\ & & & & (3) \end{pmatrix}$$

cc) $m_g(t) = (t^2+3)^2 \, (t^2+2)^3$

d'où $P_1 = (t^2+3)^2 = t^4 + 6t^2 + 9$

$P_2 = (t^2+2)^3 = t^6 + \quad + \quad +$

$P_3 = t^2+3$

$P_4 = (t^2+2)^2 = t^4 + 4t^2 + 4$

$P_5 = t^2 + 2$

d'où
$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (0) & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ (0) & 1 & 0 & -6 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & -8 \\ 1 & 0 & & (0) & & 0 \\ & 1 & 0 & & & -12 \\ & & 1 & 0 & & 0 \\ (0) & & & 1 & 0 & -6 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -4 \\ 1 & 0 & & 0 \\ (0) & 1 & 0 & -4 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $\{p_1, p_2, p_3\}$; $\{p_1, p_2, p_5\}$ d'où

on a $\begin{pmatrix} (C_1) & & (0) \\ & (C_2) & \\ (0) & & (C_3) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (C_4) & & (0) \\ & (C_2) & \\ (0) & & (C_5 \end{pmatrix}$

2

iii) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & -1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$

Montrons que A est hermitienne, c'est à dire que $A =$
(avec $A^* = \bar{A}^t$)

d'où $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & -1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$ donc $A^* = A$
$\Rightarrow A$ est hermitienn

. Forme quadratique hermitienne

1

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & -1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$= (x, y, z) \begin{pmatrix} x - i\bar{y} \\ i\bar{x} - \bar{y} + i\bar{z} \\ -i\bar{y} + \bar{z} \end{pmatrix} = |x|^2 - ix\bar{y} + iy\bar{x} - |y|^2 + yi\bar{z} - iz\bar{y} + |z$$

$$= |x|^2 - |y|^2 + |z|^2 - i\bar{y}(x + z + i y(\bar{x} +$$

Benoît GRIHAUD DS d'Algèbre feuille 2/3

La forme quadratique hermitienne qui admet A comme représentation matricielle est :

$$|x|^2 - |y|^2 + |z|^2 - i\bar{y}(x+z) + iy(\bar{x}+\bar{z})$$

C

non

. Trouvons une matrice singulière C tq $H = C^* A C$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & -1 & i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1' \leftarrow L_1 \\ L_2' \leftarrow -iL_1 + L_2 \\ L_3' \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & i & -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} C_1' \leftarrow C_1 \\ C_2' \leftarrow iC_1 + C_2 \\ C_3' \leftarrow C_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & i & -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1'' \leftarrow L_1' \\ L_2'' \leftarrow L_2' \\ L_3'' \leftarrow i.L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & i & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & i & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} C_1'' \leftarrow C_1' \\ C_2'' \leftarrow C_2' \\ C_3'' \leftarrow -iC_2 - 2C_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & i & -2 \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{H}$ $\underbrace{}_{C^*}$ C

2

Verification: Montrons que $H = C^* \cdot A \cdot C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 1 & i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & -1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & -2 & i \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{H}$$

Trouvons une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$= (x, y, z) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -2\bar{y} \\ 6\bar{z} \end{pmatrix} = |x|^2 - 2|y|^2 + 6|z|^2.$$

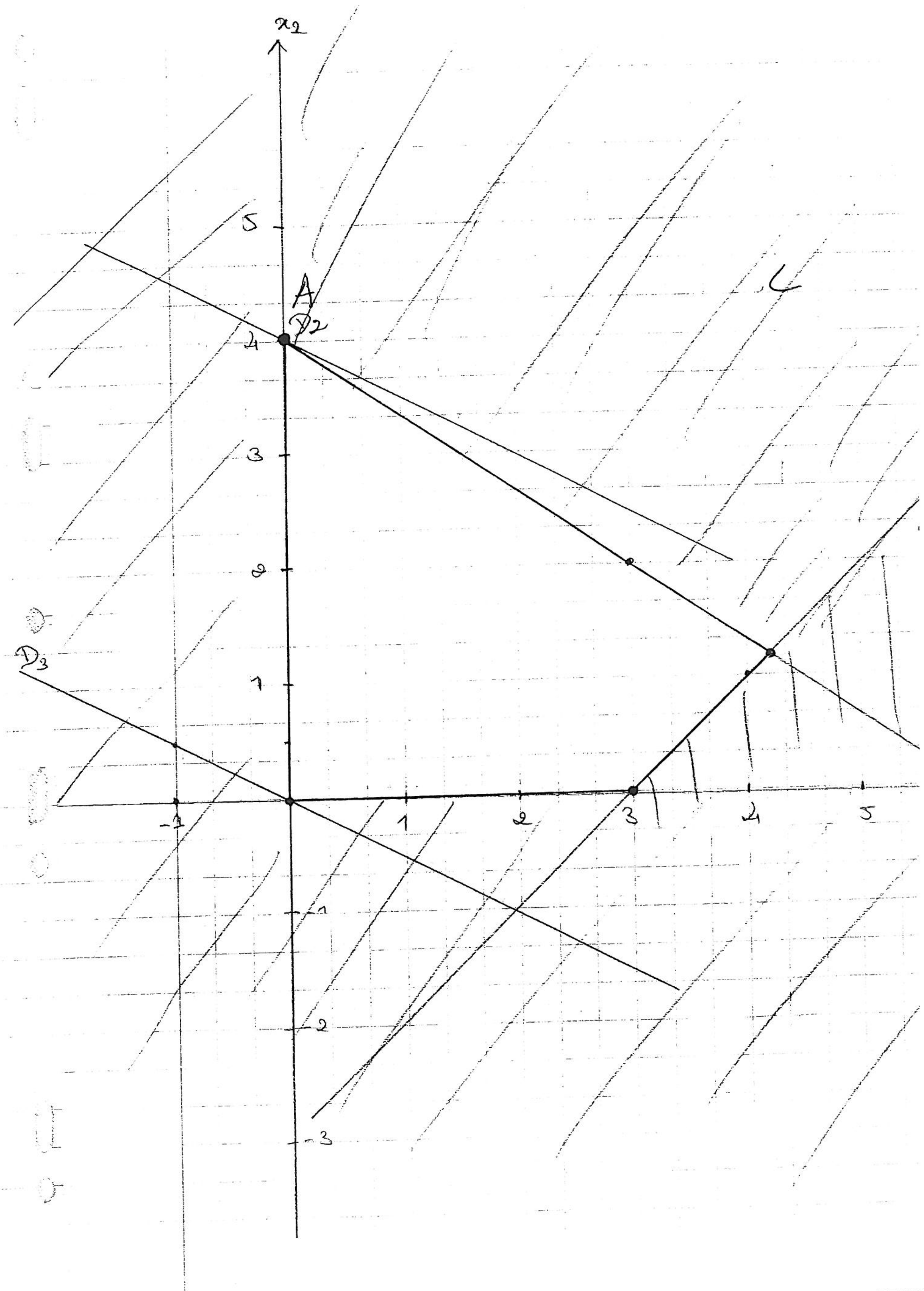
Exercice n° 2:

. Optimisation par la méthode géométrique:

$D_1 : 3x_1 - x_2 = 9$

$D_2 : 2x_1 + 3x_2 = 12$

$D_3 : x_1 + 2x_2 = 0$



x_2
5
A
D_2
4
3
2
1
D_3
C
-1
1
2
3
4
5
-1
-2
-3

$A(0,4)$ est le point maximum d'où

(3) $Z^* = 0 + 4 \times 2 = 8$

. Méthode des tableaux du simplexe :

. Forme standard : $\min(-Z = -x_1 - 2x_2)$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\} \end{cases}$$

Premier tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	SM
-1	-2	0	0	-1	0
3	-1	1	0	0	9
2	3	0	1	0	12

$x_3^* = 9$
$x_4^* = 12$
$\check{x}_1 = \check{x}_2 = 0$ (hors base)

la base (x_3, x_4) est réalisable mais non optimale.

variable entrante : x_2 car $\bar{C}_2 < \bar{C}_1 < 0$
variable sortante : $\{3 \cdot 8 + x_4 = 12\} \Rightarrow \min_{R \geq 0} \{4\}$
$\Rightarrow x_4$ variable sortante.

Pivot : C_2 L_3 $\Rightarrow$ pivot $= 3$

$L_3' \leftarrow \frac{L_3}{3}$

$L_2' \leftarrow \frac{L_3}{3} + L_2$
$L_1' \leftarrow 2 \cdot \frac{L_3}{3} + L_1$

GRIMAUD
Benoît

D S d'Algèbre : feuille 3/3

x_1	x_2	x_3	x_4	z	sd
$1/3$	0	0	$2/3$	-1	8
$11/3$	0	1	$1/3$	0	13
$2/3$	1	0	$1/3$	0	4

(3) La base (x_2, x_3) est réalisable et optimale donc

$$\left\{\begin{array}{l} x_2^* = 4 \\ x_3^* = 13 \\ \tilde{x}_1 = \tilde{x}_4 = 0 \text{ (hors base)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Finalement : } Z^* = 8.$$

C

Exercice n° 3.

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Montrons que U est unitaire. Pour cela, il faut montrer que $U^* . U = I$

or $U^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

C

d'où $U \times U^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/ \\ i/\sqrt{2} & -1/ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2 & -1/2 + i/2 \\ i/2 - i/2 & 1/2 + 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

U est donc une matrice unitaire ✓

On a montré que $U^* = U \Rightarrow U$ est hermitienne

1 De plus, toute matrice hermitienne est normale
car $U^* U = U \cdot U^* \Rightarrow U$ est normale ✓
✓

b) Le produit scalaire correspondant à la norme précédente est :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i \overline{y_i}$$

OL

• on a $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |v_i|^2}$

d'où si $u = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ alors $\|u\|_2 = \sqrt{(3/2)^2 + (1/2)^2}$

1.5

$$\boxed{\|u\|_2 = \sqrt{\frac{10}{4}}}$$

✓

$$\cdot\, U(u) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-3+i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{3i+1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\text{d'où } \|U(u)\| = \sqrt{\left|\frac{-3+i}{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{3i+1}{2\sqrt{2}}\right|^2}}$$

NW 0

d'où $\cancel{\|U(u)\| = \sqrt{\frac{-9-6i-1}{8} + \frac{-9+6i+1}{8}}}$

$\cancel{= \sqrt{\frac{0}{8}} = 0}$

d'où $\cancel{\boxed{\|U(u)\| = 0}}$

c) $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Verifions si B est hermiti

d'où $B^* = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ donc $B^* = B$, la matrice est hermitienne.

1

On sait que toute matrice hermitienne est normale donc B est normale.

d) Theoreme de la conservation du produit vectoriel : $\|v\|_2 = \|Bv^*\|_2$.

$\|B\|_2 = \sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|B(v)\|_2}{\|v\|_2}$ or $\|v\|_2 = \|Bv^*\|_2$

$= \sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|B(v)\|}{\|B(v^*)\|}$

Cherchons la valeur du rapport : $\dfrac{\|B\|_2}{\|U^* B U\|_2}$

Cherchons ce que vaut $\|U^* B U\|_2$ sachant que U est unitaire :

$$\|U^* B U\|_2^2 = \langle U^* B U , U^* B U \rangle$$

$$= \langle B U , \underbrace{U U^*}_{I} B U \rangle$$

$$= \langle B U , B U \rangle = \|B U\|_2^2$$

2,5

d'où $\|U^* B U\|_2^2 = \|B U\|_2^2$

d'où $\dfrac{\|B\|_2}{\|U^* B U\|_2} = \dfrac{\|B\|_2}{\|B U\|_2}$

$$= \sup \frac{\frac{\|B(u)\|}{\|u\|}}{\frac{\|B(u)\|}{1}} = \frac{\|B(u)\|}{\|u\|} \cdot \frac{1}{\|B(u)\|} = \sup \frac{1}{\|u\|_2} = 1$$

$\hookrightarrow \|u\|_2 \leq 1$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Devoir surveillé n^0 1 (Algèbre)
donné le 4 décembre 2007 (Durée 2h.)

I (7 *Pts.*)

i) Déterminer toutes les formes canoniques de **Jordan** possibles pour la matrice réelle A dont le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et le polynôme minimal $m_A(t)$ sont les suivants :

$$P_A(t) = (t^2-16t+64)^3(t^2+2\sqrt{3}\,t+3)^2; \qquad m_A(t) = (t^2-16t+64)^2(t^2+2\sqrt{3}\,t+3)^2$$

ii) Soit E un espace vectoriel de dimension 12 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme $f : E \to E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m_f(t) = (t^2+5)^2(t^2+7)^3.$$

Trouver toutes les formes **rationnelles canoniques** possibles pour f.

iii) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & +2i & 0 \\ -2i & 1 & -i \\ 0 & +i & 3 \end{pmatrix};$$

a) Vérifier si A est une matrice hermitienne. Trouver une forme **quadratique hermitienne** qui admet A comme représentation matricielle.

b) Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $H = C^*AC$, soit diagonale. Vérifier votre résultat.

Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.

II (6 *Pts.*)

Optimiser par la méthode géométrique et par la méthode (des tableaux) du simplexe :

$$\max(F = x_1 + 2x_2)$$

$$\text{avec les contraintes :} \quad \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

III (7 *Pts.*)

a)

Soit la matrice $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice U est unitaire.

b) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ et on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} h \,:\, \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,\, v) & \longrightarrow & h(u,\, v) \;=\; a\bar{u}_1 v_1 + b u_2 \bar{v}_2 \end{array}$$

Quelles seraient les conditions qu'on imposerait sur les parametres a et b pour que l'application h soit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^2$?

Quelle serait alors la norme associée d'un vecteur quelconque :

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,?$$

c) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, muni de la norme $\|v\|_2$ définie comme il suit, $\forall\, v \in \mathbb{C}^2$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |v_i|^2}$$

et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on définit la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ par :

$$\|M\|_2 \equiv \sup_{\|v\|\leq 1} \frac{\|M(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et le vecteur $u \in \mathbb{C}^2$ suivants :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle de ce vecteur u particulier, et du vecteur transformé $U(u)$ (avec U la matrice de la question a)). Comparer les deux normes .

d) En supposant que U est unitaire justifier votre résultat par application d'un théorème. **Donner la démonstration de ce théorème.**

Donner une expression des normes matricielles $\|B\|_2$ et $\|U^*BU\|_2$. Connaissez vous la valeur du rapport

$$\frac{\|B\|_2}{\|U^*BU\|_2} \;?$$

Justifier votre réponse (en supposant toujours que U est unitaire), par application du théorème correspondant **avec démonstration.**

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Devoir surveillé n^0 $1a$ (Rattrapage) (Algèbre)
donné le 21 avril 2008 (Durée 2h.)

I (7 *Pts.*)

i) Déterminer toutes les formes canoniques de **Jordan** possibles pour la matrice réelle A dont le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et le polynôme minimal $m_A(t)$ sont les suivants :

$$P_A(t) = (t^2+14t+49)^3(t^2+2\sqrt{5}\,t+5)^2; \qquad m_A(t) = (t^2+14t+49)^2(t^2+2\sqrt{5}\,t+5)$$

ii) Soit E un espace vectoriel de dimension 12 sur $\mathbb{R}$ et soit l'endomorphisme f : $E \to E$, ayant pour polynôme minimal :

$$m_f(t) = (t^2+6)^2(t^2+2)^3.$$

Trouver toutes les formes **rationnelles canoniques** possibles pour f.

iii) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & +i & 0 \\ -i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 2 \end{pmatrix};$$

a) Vérifier si A est une matrice hermitienne. Trouver une forme **quadratique hermitienne** qui admet A comme représentation matricielle.

b) Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $H = C^*AC$, soit diagonale. Vérifier votre résultat.

Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.

II (6 *Pts.*)

Optimiser par la méthode géométrique et par la méthode (des tableaux) du simplexe :

$$\max(F = x_1 + 2x_2)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

III (7 *Pts.*)

a)

Soit la matrice $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice U est unitaire.

b) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ et on définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longrightarrow h(u, v) = a\bar{u}_1 v_1 + b u_2 \bar{v}_2 \end{aligned}$$

Quelles seraient les conditions qu'on imposerait sur les parametres a et b pour que l'application h soit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^2$?

Quelle serait alors la norme associée d'un vecteur quelconque :

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 ?$$

$<x, y> = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$

c) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, muni de la norme $\|v\|_2$ définie comme il suit, $\forall\, v \in \mathbb{C}^2$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |v_i|^2}$$

et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on définit la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ par :

$$\|M\|_2 \equiv \sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|M(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et le vecteur $u \in \mathbb{C}^2$ suivants :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad u = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle de ce vecteur u particulier, et du vecteur transformé $U(u)$ (avec U la matrice de la question a)). Comparer les deux normes .

c) En supposant que U est unitaire justifier votre résultat par application d'un théorème. **Donner la démonstration de ce théorème.**

Donner une expression des normes matricielles $\|B\|_2$ et $\|U^* BU\|_2$. Connaissez vous la valeur du rapport

$$\frac{\|B\|_2}{\|U^* BU\|_2} ?$$

Justifier votre réponse (en supposant toujours que U est unitaire), par application du théorème correspondant **avec démonstration.**