EISTI **Année scolaire 2009-2010**

DÉPARTEMENT "INFORMATIQUE"

THÉORIE DE L'INFORMATION

Devoir surveillé du 25 mai 2010. *Durée 2h00.*

Document autorisé : *polycopié du cours imprimé uniquement. Les* **calculatrices** *sont admises.*

Exercice 1. Compression d'images

On considère dans cet exercice trois images, I_1, I_2 et I_3.

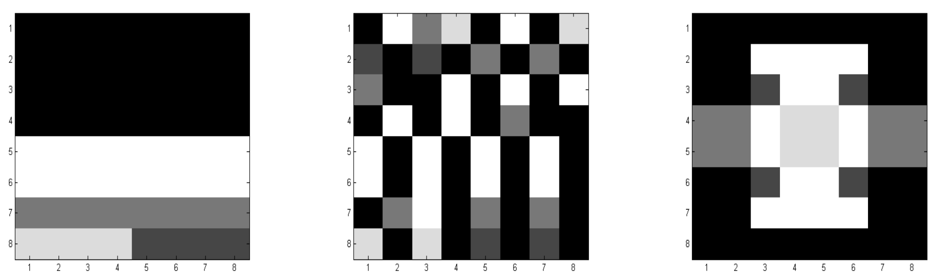

FIGURE 1 – Trois images

Chaque image est de taille 8×8 pixels, en niveaux de gris. On suppose que ces images sont initialement codés sur 8 bits : le niveau de gris de chaque pixel est représenté par un nombre entier entre 0 (blanc) et 255 (noir). Chacune de ces images comporte seulement 5 niveaux de gris différents que l'on notera avec des lettres comme ceci :

$$B - blanc,\ \ N - noir,\ \ C - Gris\ clair,\ \ G - gris,\ \ F - gris \text{ foncé}$$

On donne ci-dessous les matrices de niveaux de gris des trois images :

$$I_1 = \begin{pmatrix} N & N & N & N & N & N & N & N \\ N & N & N & N & N & N & N & N \\ N & N & N & N & N & N & N & N \\ N & N & N & N & N & N & N & N \\ B & B & B & B & B & B & B & B \\ B & B & B & B & B & B & B & B \\ G & G & G & G & G & G & G & G \\ C & C & C & C & F & F & F & F \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} N & B & G & C & N & B & N & C \\ F & N & F & N & G & N & G & N \\ G & N & N & B & N & B & N & B \\ N & B & N & B & N & G & N & N \\ B & N & B & N & B & N & B & N \\ B & N & B & N & B & N & B & N \\ N & G & B & N & G & N & G & N \\ C & N & C & N & F & N & F & N \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} N & N & N & N & N & N & N & N \\ N & N & B & B & B & B & N & N \\ N & N & F & B & B & F & N & N \\ G & G & B & C & C & B & G & G \\ G & G & B & C & C & B & G & G \\ N & N & F & B & B & F & N & N \\ N & N & B & B & B & B & N & N \\ N & N & N & N & N & N & N & N \end{pmatrix}$$

Chacune de ces images comporte **exactement** 32 pixels noirs, 16 pixels blancs, 8 pixels gris, 4 pixels gris clair et 4 pixels gris foncé.

1. Notons
$$t_1^{rle},\ t_2^{rle},\ t_3^{rle}$$
les taux de compression respectifs obtenus après l'application de codage RLE. **Sans appliquer ici l'algorithme RLE** , classer les taux de compression dans l'ordre croissant. Justifier obligatoirement votre réponse.
2. Notons
$$t_1^{H},\ t_2^{H},\ t_3^{H}$$
les taux de compression des trois images après l'application de codage de Huffman. **Sans appliquer l'algorithme de Huffman** dire si l'une des trois images aura un meilleur taux de compression que les autres. Justifier votre réponse.
3. On considère dans la suite l'image I_3.
   (a) Donner la répartition de probabilités de source associée à cette image.
   (b) Calculer l'entropie de l'image. Quelle est la valeur minimale de la longueur moyenne des mots de code pour un code binaire possible pour cette image ?
   (c) Est ce que un code absolument optimal existe ? Justifiez votre réponse.
   (d) Calculez le code de Huffman pour cette image (Construire l'arbre du code et en déduire la table du code).
   (e) Calculez la longueur moyenne des mots de code pour le code de Huffman que vous avez obtenu. Est ce que le code obtenu est optimal ? Si oui, dans quelle classe de codes binaires ?
   (f) Est ce que le code de Huffman obtenu est absolument optimal ? Pourquoi ?
   (g) Calculer le taux de compression du codage de Huffman pour l'image I_2.

Exercice 2. Un canal binaire avec effacement.

Soit une source d'information binaire de distribution de probabilités $\{P(0) = p,\ P(1) = 1 - p\}$. Soit un canal dont l'alphabet est composé de trois caractères : $\Omega_C = \{0, 1, -1\}$. Le caractère -1 signifie que le symbole transmis a été effacé et qu'il n'est pas possible de le déterminer à réception.

– Si le symbole envoyé X est 0 alors on reçoit :
  1. $Y = 0$ avec la probabilité α
  2. $Y = -1$ avec la probabilité β

3. $Y = 1$ avec probabilité 0

– Si le symbole envoyé X est 1 alors on reçoit :
  1. $Y = 1$ avec la probabilité α
  2. $Y = 0$ avec probabilité 0
  3. $Y = -1$ avec la probabilité β

1. Déterminer les matrices de probabilités conditionnelles $P(Y|X)$ et $P(X|Y)$ ainsi que la matrice des probabailités conjointes $P(X, Y)$.
2. Est ce que ce canal est symétrique ? Justifier la réponse.
3. Montrer que
$$H(X|Y) = (1 - \alpha)H(X)$$
4. Montrer que $I(X; Y) = \alpha H(X)$.
5. En déduire que la capacité du canal
$$C = \alpha$$

Exercice 3. Code Linéaire. Soit un code linéaire de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner les paramètres (n, k) de ce code.
2. Donner la forme systématique de la matrice génératrice G.
3. Calculer tous les mots du code
4. Calculer la distance minimale du code
5. Calculer la capacité de correction et la capacité de détection du code
6. Donner la matrice de contrôle du code

ANNEXE. Table de logarithme de base 2

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.01	-6.6438	0.0664
0.02	-5.6438	0.1128
0.03	-5.0588	0.1517
0.04	-4.6438	0.1857
0.05	-4.3219	0.2160
0.06	-4.0588	0.2435
0.07	-3.8365	0.2685
0.08	-3.6438	0.2915
0.09	-3.4739	0.3126
0.10	-3.3219	0.3321
0.11	-3.1844	0.3502
0.12	-3.0588	0.3670
0.13	-2.9434	0.3826
0.14	-2.8365	0.3971
0.15	-2.7369	0.4105
0.16	-2.6438	0.4230
0.17	-2.5563	0.4345
0.18	-2.4739	0.4453
0.19	-2.3959	0.4552
0.20	-2.3219	0.4643
0.21	-2.2515	0.4728
0.22	-2.1844	0.4805
0.23	-2.1202	0.4876
0.24	-2.0588	0.494134
0.25	-2.00	.50
0.26	-1.9434	0.5052
0.27	-1.8889	0.5100
0.28	-1.8365	0.5142
0.29	-1.7858	0.5179
0.30	-1.7369	0.5210
0.31	-1.6896	0.5237
0.32	-1.6438	0.5260
0.33	-1.5994	0.5278

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.34	-1.5563	0.5291
0.35	-1.5145	0.5301
0.36	-1.4739	0.5306
0.37	-1.4344	0.5307
0.38	-1.3959	0.5304
0.39	-1.3584	0.5297
0.40	-1.3219	0.5287
0.41	-1.2863	0.5273
0.42	-1.2515	0.5256
0.43	-1.2175	0.5235
0.44	-1.1844	0.5211
0.45	-1.1520	0.5184
0.46	-1.1202	0.5153
0.47	-1.0892	0.5119
0.48	-1.0588	0.5082
0.49	-1.0291	0.5042
0.50	-1.00	0.50
0.51	-0.9714	0.4954
0.52	-0.9434	0.4905
0.53	-0.9159	0.4854
0.54	-0.8889	0.4800
0.55	-0.8624	0.4743
0.56	-0.8365	0.4684
0.57	-0.8109	0.4622
0.58	-0.7858	0.4558
0.59	-0.7612	0.4491
0.60	-0.7369	0.4421
0.61	-0.7131	0.4350
0.62	-0.6896	0.4275
0.63	-0.6665	0.4199
0.64	-0.6438	0.4120
0.65	-0.6214	0.4039
0.66	-0.5994	0.3956

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.67	-0.5777	0.3871
0.68	-0.5563	0.3783
0.69	-0.5353	0.3693
0.70	-0.5145	0.3602
0.71	-0.4941	0.3508
0.72	-0.4739	0.3412
0.73	-0.4540	0.3314
0.74	-0.4344	0.3214
0.75	-0.4150	0.3112
0.76	-0.3959	0.3009
0.77	-0.3770	0.2903
0.78	-0.3584	0.2795
0.79	-0.3400	0.2686
0.80	-0.3219	0.2575
0.81	-0.3040	0.2462
0.82	-0.2863	0.2347
0.83	-0.2688	0.2231
0.84	-0.2515	0.2112
0.85	-0.2344	0.1992
0.86	-0.2175	0.1871
0.87	-0.2009	0.1747
0.88	-0.1844	0.1622
0.89	-0.1681	0.1496
0.90	-0.1520	0.1368
0.91	-0.1360	0.1238
0.92	-0.1202	0.1106
0.93	-0.1046	0.0973
0.94	-0.0892	0.0839
0.95	-0.0740	0.0703
0.96	-0.0588	0.0565
0.97	-0.0439	0.0426
0.98	-0.0291	0.0285
0.99	-0.0145	0.0143