ThInfo_Exam Corrigé

Titre de la note 28/05/2010

Exc 1

1) Réponse : $t_2^{RLE} < t_3^{rle} < t_1^{rle}$ 1,5 pts. 0 si pas justifié

Justification. Le codage rle remplace chaque séquence de pixels de même couleur par un couple (c, n) où c est le code couleur et n nombre de pixels répétés.

Ainsi il y a gain de place seulement pour les sequences de 3 pixels ou plus.

Or dans l'image I_2 on peut remarquer qu'il n'y a aucune séquence de 3 pixels identiques (ligne par ligne). Presque toutes les sequences sont de 1 pixel et entrainent l'augmentation de place en mémoire.

La meilleure des trois images est I_1 car elle est composée de blocs de couleurs uniforme. d'où le classement :

$$t_2 < t_3 < t_1$$

2) Réponse : $t_1^H = t_2^H = t_3^H$ 1.5 pts, 0 si pas justifié

Justification : le codage de Huffman ne dépend que de la distribution des probas de la source. Le taux de compression ne dépend pas de la disposition relative des caractères. Comme les trois images ont les mêmes quantités de pixels de chaque couleur les distrib. de proba sont aussi les mêmes. Donc

$$t_1^h = t_2^h = t_3^h$$

3.

a) 0.5 pts.

Distrib. probas:

x_i	n	b	g	c	f
P_i	1/2	1/4	$\frac{1}{8}$	1/16	1/16

b) 1.0 pt

$$H = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{2}{16}\log\frac{1}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{2}{16}\cdot 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$$

$$= \frac{8+3+4}{8} = \frac{15}{8} = 1.875$$

La borne inf pour la long. moyenne des mots d'un code binaire est $H(I) = 1.875$ (Th. de la borne inf)

c) 1.0 pt

Oui un code abs. optimal existe ici car les probabilités de la source sont toutes des puissances entières de $\frac{1}{2}$:

$$P_1 = \frac{1}{2^1} \quad P_2 = \frac{1}{2^2} \quad P_3 = \frac{1}{2^3} \quad P_4 = P_5 = \frac{1}{2^4}$$

D'après le th. de la borne inf le code abs. optimal existe et a pour longueur des mots

$$l_1 = 1 \quad l_2 = 2 \quad l_3 = 3 \quad l_4 = l_5 = 4$$

d) 1.0 pt. Code de Huffman

n	0.5
b	0.25
g	0.125
c	0.0625
f	0.0625

n	0.5
b	0.25
g	0.125
cf	0.125

n	0.5
b	0.25
gcf	0.25

n	0.5
bgcf	0.5

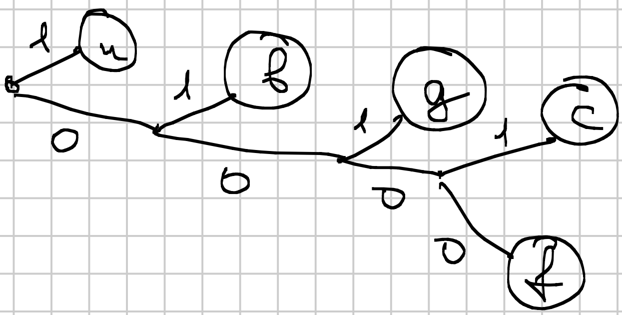

Table de code:

x_i	n	b	g	c	f
m_i	1	01	001	0001	0000
l_i	1	2	3	4	4
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

e) 1 pt

$$\bar{L} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + 2\cdot\frac{1}{16}\cdot 4 = \frac{15}{8}$$

Le code de Huffman est toujours optimal dans la classe des codes sans préfixe

f) 1pt. Le code obtenu est absolument optimal car nous avons

$$\bar{L} = H$$

g) 0.5pt.

$$t = 1 - \frac{\ell(U)}{\ell(I_3)}$$

$$\ell(I_3) = 64\times 8 \text{ bits}$$

$$\ell(U) = 32\cdot 1 + 16\cdot 2 + 8\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 4$$

$$= 32 + 32 + 24 + 16 = 104$$

$$t = 1 - \frac{104}{64\cdot 8} = 1 - \frac{52}{64\cdot 4} = 1 - \frac{26}{64\cdot 2} = 1 - \frac{13}{64} = \frac{51}{64}$$

Ex 2

1) 1,5 pt

$$P(Y|_X) = \begin{array}{c|ccc} X \backslash Y & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 1 & 0 & \alpha & \beta \end{array}$$

P_X :

X	P_X
0	p
1	$1-p$

$$P(X,Y) = \begin{pmatrix} \alpha p & 0 & \beta\cdot p \\ 0 & \alpha(1-p) & \beta(1-p) \end{pmatrix}$$

P_Y :

Y	0	1	-1
P_Y	αp	$\alpha(1-p)$	β

$$P(X|_Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 1-p \end{pmatrix}$$

② Canal non symétrique 0,5 pt

3) $H(X|_Y) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j)\cdot P(x_i|_{y_j}) = -\beta p \log p - \beta(1-p)\log(1-p)$

1,0 pt

$$= \beta H(X) = (1-\alpha)H(X)$$

($\alpha + \beta = 1$ d'après la définition de distrib de probas conditionnelle $P(Y|_X)$)

4) $I(X,Y) = H(X) - H(X|_Y) = \alpha H(X)$ 0,5 pt

5) $C = \max_{P_X} I(X,Y) = \max_{0 \le p \le 1} \alpha H(X) = \alpha$

1,5 pt

car X est une source bin $\Rightarrow \max_p H(X) = 1$

Ex 3 1 question = 1 pt

(1) $n = 5$, $k = 3$

(2) Forme systématique

une opération : $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 \\ G' \end{pmatrix} \qquad G' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $k = 3 \Rightarrow 2^k = 8$ mots

Pour tout $m = (m_1\ m_2\ m_3)^T \in \{0,1\}^3$

$$w(m) = Gm = \begin{pmatrix} I_3 \\ G' \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} m \\ m' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad m' = G'm$$

m	$w(m)$	$\omega(w)$
000	00000	0
001	00101	2
010	01010	2
100	10011	3
110	11001	3
101	10110	3
011	01111	4
111	11100	3

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $d = \min\limits_{w \neq 0} \omega(w) = 2$

(5) Capacité de détection

$e_d = d - 1 = 1$

Capacité de correction

$e_c = E\left[\dfrac{d-1}{2}\right] = 0.$

6) $H = (G', I_2) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilan barème

Ex 1

1.		1.5	Total ex1 : 9 pts.
2.		1.5	
3.	a.	0.5	
	b.	1.0	
	c.	1.0	
	d.	1.0	
	e.	1.0	
	f.	1.0	
	g.	0.5	

Ex 2

1.	1.5	Total 5 pts
2	0.5	
3.	1.0	
4.	0.5	
5.	1.5	

Ex 3

1	1.0	6 pts
2	1.0	
3	1.0	
4	1.0	
5	1.0	
6	1.0	
