Cycle Ingénieur - Première année

Examen de Théorie des Graphes

20 juin 2011

Durée 1h30 - Documents de cours et de TD autorisés.

Utiliser l'espace blanc prévu pour répondre

Nom :

Exercice 1.1	Exercice 1.2
2	4

Exercice 2.1	Exercice 2.2	Exercice 2.3	Exercice 2.4	Exercice 2.5
2	2	4	2	2

Exercice 3.1	Exercice 3.2
2	2

Notations

Note globale :

Question 1 : Exercices divers

Exercice 1.1 On appelle diamètre d'un graphe G la longueur de la plus longue chaine élémentaire de G. Soit T un arbre de n sommets et de diamètre 4.

1. Quel est le nombre maximum de sommets pendants de T : $n-3$.
2. Quel est le nombre minimum de sommets pendants de T : 2.

Exercice 1.2

1. Dans une classe de 17 élèves, deux quelconques sont toujours amis, ou ennemis, ou indifférents l'un à l'autre (chacun des sentiments étant partagé par les deux élèves en question). Prouver qu'il existe un groupe de trois élèves qui ont deux à deux les mêmes sentiments les uns envers les autres.
2. Dans une classe de 18 élèves, deux quelconques sont toujours amis ou ennemis. Prouver qu'il existe 4 de ces élèves qui ont tous les mêmes sentiments les uns envers les autres.

Idée du corrigé K17 et 3 couleurs (R V B) Soit A un sommet arbitraire, de degré 16 donc 6 arêtes reliées à A d'une même couleur, disons R Si 2 des 6 sommets reliés à A sont liées par une arête R, on a un triangle mono. Sinon on a 6 sommets reliés 2 à 2 par 2 couleurs (V et B), donc un triangle mono (cf TD) .

K18 et 2 couleurs (R et V. Soit A un sommet arbitraire, de degré 17 donc 9 arêtes reliées à A d'une même couleur, disons R. Soit M1..M9, 9 sommets reliés à A par une arête R. Si parmi les 8 arêtes liant M1 et M2..M9, - il y en a au moins 6 de couleur V, on a un triangle mono :
- S'il est R, alors on a un K4 R avec A
- S'il est V, alors on a un K4 V avec M1

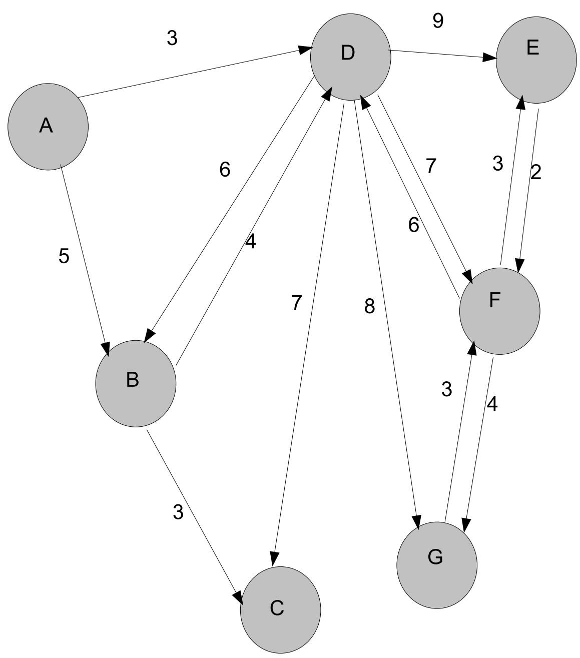
S'il y en a exactement 5 de couleur V, on obtient un graphe à 9 sommets tous de degré impairs (impossible) - il y en a au plus 4 de couleur V, il en reste 4 de couleur R, par exemple M2,M3,M4,M5 :
- Si une des arête qui relie ces 4 sommets est rouge, par exemple (M2 M3) alors A,M1,M2,M3 forment un K4 R.
- Sinon M2 M3 M4 M5 forment un K4 V

Question 2 : Réseaux de courriers électroniques dans une organisation

Nous représentons l'ensemble des "emails" relevés pendant une période donnée au sein d'une entreprise par **un graphe orienté valué**. Les sommets de ce graphe sont les personnes employées par l'entreprise. Un arc reliant une personne x à une personne y signifie que x a envoyé des "emails" à y. La valeur de cet arc indique le nombre des "emails" envoyés.

La figure suivante montre un exemple simple d'un réseau de "emails" qu'on appellera par la suite *GMails*, relevés dans une organisation composée de 7 personnes pendant une période assez courte.

Soit *GMails* le graphe suivant :



Exercice 2.1 Proposer un algorithme qui permet de détecter les circuits dans un graphe de "emails". Appliquer cet algorithme sur le graphe *GMails*.

Idée du corrigé Il faut appliquer l'algorithme tri topologique et détecter les pré-visites qui arrivent avant les post-visites. Chaque fois qu'une pré-visite est détectée avant une post-visite, un circuit est détecté. Par exemple, pour le parcours D,F,G,D, D est re-vistié avant qu'il soit post-visité (car on n'a pas encore exploré D,E,..)

Exercice 2.2 Trouver le graphe partiel maximum de *GMails* qui accepte un tri topologique. Nous appelons ce graphe H.

1. Appliquer l'algorithme de tri topologique sur le graphe H.
2. Comment utiliser le résultat de ce tri pour détecter d'une façon efficace les personnes qui n'ont pas reçu de "emails" ainsi que les personnes qui n'ont pas envoyé de "emails" ?

Idée du corrigé Nous gardons dans H les arêtes suivantes :
AB, AD,BC,DC,DE,DF,DG,DF,FE,FG.
Nous appliquons ensuite le tri topologique pour trier les sommets. L'inverse de l'ordre des sommets post-visités correspond à l'ordre des sommets triés. Nous Pour trouver les personnes qui ne reçoivent pas des emails, nous commençons la recherche par le début de la liste triée des personnes, pour trouver les personnes qui ne reçoivent pas des emails. Pour trouver les personnes qui n'envoient pas de mails nous commençons la recherche par la fin.

Exercice 2.3 Soit X l'ensemble des sommets du graphe *GMails*. Considérons **le graphe complet non orienté dont l'ensemble de sommet est X** et qui est valué de la façon suivante $(x, y \in X)$:

- Si la relation entre x et y n'est pas symétrique dans *GMails* alors la valeur de l'arête xy est la même que la valeur de l'arc xy.
- Si la relation entre x et y est symétrique dans *GMails* alors la valeur de l'arête xy est égale à la somme des valeurs des arcs xy et yx.
- S'il n'existe pas d'arcs entre x et y dans *GMails* alors la valeur de l'arête xy est égale à 0.

Nous appelons ce graphe *GMails-Complet* . Nous cherchons le cycle hamiltonien ayant la valeur maximale dans ce graphe.

1. Proposer un algorithme de type glouton dans le but d'approcher cette recherche.
2. Trouver tous les cycles possibles en appliquant l'algorithme proposé à partir des différents sommets sur le graphe *GMails-Complet* .

3. Quelle est l'interprétation de ces cycles dans le contexte du réseau des "emails" ?
4. Parmi les sept cycles trouvés, lequel est le meilleur ? Justifier.

Idée du corrigé Le graphe étant complet et valué et non orienté, nous proposons l'algorithme glouton vu en cours mais en prenant à chaque sommet l'arête ayant la valeur maximale (au lieu de la valeur minimale) qui ramène vers un sommet non visité encore et ceci jusqu'à la complétion du cycle.

Nous appliquons cet algorithme autant de fois qu'il y ait de sommets pour trouver tous les cycles hamiltoniens de valeurs maximales (les 7 cycles).

Parmi les cycles trouvés, le meilleur est celui qui a la valeur maximale. Ce cycle correspond à la quantité d'échange maximale qui implique la totalité des personnes au sein de l'entreprise.

Exercice 2.4 Comment appliquer l'algorithme $\frac{1}{2}$approché vu en cours sur *GMails-Complet* pour trouver le cycle hamiltonien ayant la valeur maximale ? Donner le cycle trouvé. Comparer avec les cycles trouvés dans l'exercice précédent.

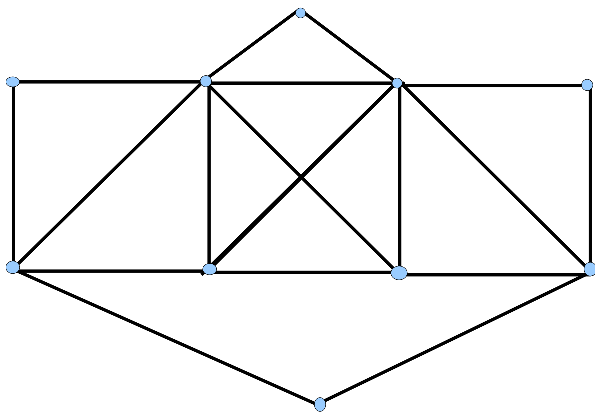
Idée du corrigé Appliquer les trois étapes de l'algorithme demi-approché vu en cours à savoir : trouver l'arbre couvrant maximum, dédoubler les arêtes pour trouver le graphe eulérien. Simplifier enfin le cycle eulérien pour trouver le cycle hamiltonien et calculer son coût.

Exercice 2.5 Proposer un algorithme permettant de trouver une partition de X en groupes d'utilisateurs de façon à ce qu'il n'y ait pas de communication "email" entre les utilisateurs d'un même groupe. Appliquer cet algorithme sur le graphe *GMails*.

Idée du corrigé Nous appliquons l'algorithme de coloration de sommets du graphe de façon à ce qu'aucune paire de sommets adjacents ne soit de la même couleur, les couleurs trouvés sont les partitions recherchées.

Question 3 : Graphes eulériens

Soit le graphe non orienté suivant :



Exercice 3.1 Démontrer que ce graphe est eulérien.

Corrigé Théorème d'Euler sur les degrés pairs.

Exercice 3.2 Donner toutes les étapes de l'application de la fonction recursive *Euler* sur ce graphe ; Pour chaque étape il faut mentionner le cycle construit, ainsi que les composantes connexes détectées [1]. Donner le résultat en applicant la procedure *intercaler*.

Idée du corrigé Voir le déroulement sur l'exemple du cours : l'idée est de trouver un cycle et intercaler ensuite les cycles trouvés sur les composantes connexes restantes. Les transparents du cours montrent un exemple avec des couleurs ! !

1. Vous devez nommer les sommets.