Théorie des graphes T.D. N^o 5

22 mars 2011

Graphes Orientés et Recherche Arborescente

Exercice 1 Montrer que tout circuit dans un graphe se décompose en circuits élémentaires deux à deux disjoints pour les arcs.

Corrigé 1 Un circuit (par définition) est un chemin simple et fermé, donc un circuit ne passe pas par le même arc qu'une seule fois. Dans le cas d'un circuit non élémentaire certains sommets sont traversés plusieurs fois. On peut le décomposer alors en k circuits élémentaires (k étant le nombre de sommets qui se répètent dans le circuit) qui sont disjoints pour les arcs.

Exercice 2 Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G dont l'ensemble de sommets est $X = \{x_1, x_2, .., x_n\}$. Montrer que le terme (i, j) de M^k où $k >= 1$ est le nombre de chemins reliant le sommet x_i et x_j et qui est de longueur k.
Application sur l'exemple du cours calculer le terme (2,3) de M^3.

Corrigé 2 Par définition la valeur 1 dans la case (i,j)la matrice M^1 signifie qu'il existe un chemin de longueur 1 qui relie x_i à x_j qui est l'arc même. Donc, supposons que la propriété est vraie pour M^k et démontrons la pour M^{k+1}.

$$M^{k+1}(i, j) = \sum_{l \in \{1,..,n\}} M^k(i, l)M(l, j)$$

Donc, s'il existe $M^k(i, l)$ un chemin de longueur k qui relie i à l ce chemin sera comptabilisé dans le calcul du nombre de chemins de longueur $k + 1$ si $M(l, j) = 1$, autrement dit s'il existe un arc qui relie l à j.

Exercice 3 Montrer qu'un graphe est sans circuits ssi sa matrice d'adjacence M est nilpotente, c'est à dire il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel $M^k = 0$.

Corrigé 3 Soit G un graphe sans circuit, les termes de la matrices M^k correspondent au nombre de chemins reliant deux sommets donnés. Puisque le graphe ne contient pas de circuits alors à partir de $k = n$ la matrice M^k est nilpotente.

Soit G un graphe sont la matrice M^k est nilpotente à partir d'un certain k. Supposons que G contient un circuit de longueur k_1. Alors il existe un terme (i,i) non nul dans la matrice M^{k_1}. Ce terme sera non nul aussi pour toutes les matrices M^{l*k_1} (l étant un entier supérieur à 1). Donc il n'est pas possible d'avoir un entier k pour lequel M^k est nilpotente car ceci signifie qu'il existe l_1 pour le quel $M^{l_1*k_1}$ serait niloptente.

Exercice 4 Montrer qu'un graphe orienté est une arborescence ssi il admet une racine et est minimal pour cette propriété relativement à la suppression d'arcs.

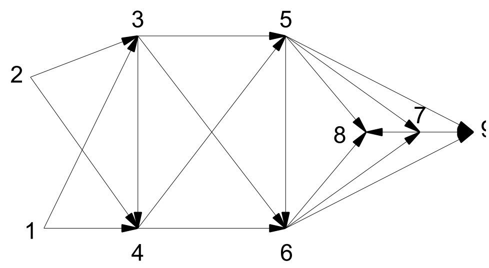
Corrigé 4 Soit G une arborescence : G a une racine r est son graphe non orienté associé est un arbre. Donc la surpression de n'importe quel arc (arête) rend le graphe non orienté associé non connexe. Dans ce cas, le sommet r n'atteindra pas tous les sommets du graphe : r n'est plus une racine (après la suppression d'un arc)

Soit G un graphe qui admet une racine et qui est minimal pour cette propriété relativement à la suppression d'arcs.

Exercice 5 Appliquer l'algorithme de tri topologique sur le premier graphe :

Corrigé 5

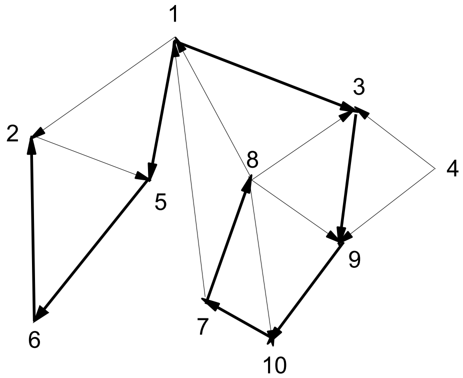
1. Prévisite de 2,3,4,5,6,7, 9. Postvisite de 9 (revenir sur le 7)
2. Prévisite de 8, postvisite de 8, postvisite de 7 (revenir sur le 6).
3. revisite de 8,9 postvisite de 6 (revenir sur le 5).
4. revisite de 8,7,9, postvisite de 5 (revenir sur le 4)
5. revisite de 6, postvisite de 4 (revenir sur le 3)
6. revisite de 4,5 et de 6, postvisite de 3 (revenir sur 2)
7. revisite de 4, postvisite de 2
8. tous les sommets sont visités sauf 1, donc, prévisite de 1, revisite de 3 et de 4, postvisite de 1.



L'ordre de sommets postvisités numéroté de 9 à 1 correspond au tri topologique des sommets (et au numéros déjà associé au sommets). Remarquer qu'on aurait pu échanger 8 et 9 (selon l'ordre de visites des successeurs du sommet 6.

Exercice 6 Comment peut on détecter un circuit dans le deuxième graphe :

Corrigé 6 En appliquant l'algorithme de tri topologique on remarque qu'on revisite le 1 avant de le postvisiter : Prévisite de 1,3,9,10,7, revisite de 1. Donc nous détectons le circuit (1,3,9,10,7,1).


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10