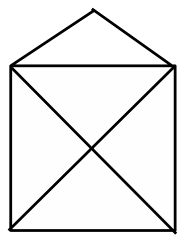
Théorie des graphes T.D. N^o 4

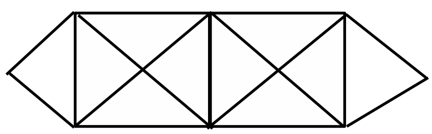
2 mars 2009

Tournées eulériennes et hamiltoniennes

Exercice 1 Exercices de réchauffement :

1. Est-ce qu'il y a une solution du problème des ponts de Konigsberg ? Justifier.
2. Par quel sommet faut-il commencer pour dessiner chacune des figures suivantes avec un seul et unique trait. Justifier.





Corrigé 1

1. Non il n'y a pas de solutions car c'est un graphe qui contient des sommets de degrés impairs (Théorème d'Euler).
2. Il faut commencer par un sommet de degré impair pour terminer la chaîne avec l'autre sommet de degré impair (Corollaire d'Euler)

Exercice 2 Montrer que si un graphe G n'a pas de sommets de degrés impairs, alors son ensemble d'arêtes peut être partitionné en classes dont chacune est l'ensemble des arêtes d'un cycle élémentaire.

Corrigé 2 En étudiant la démonstration du théorème d'euler, on constate que l'ensemble de cycles $\{C, C_1, C_2, .., C_k\}$ sont tous disjoints et l'union de ces cycle (par des points d'intercalation particuliers) correspond au cycle eulérien de ce graphe.

Exercice 3 Soit un graphe simple G tel que $n \geq 3$ et $\delta \geq \frac{n}{2}$ (δ étant le degré minimal de G).

1. Sans utiliser vos connaissances de ce cours, démontrer qu'il existe un cycle élémentaire dans G.
2. Démontrer que ce graphe est hamiltonien (théorème de Dirac).

Corrigé 3

1. En fait la somme de degrés implique que $2 * m \geq \frac{n*n}{2}$. Donc $m \geq \frac{n*n}{4}$. Donc $m \geq n$ à partir de n=3. Donc G n'est pas un arbre et par conséquent il contient un cycle.
2. Selon le théorème I du cours la somme de degrés de deux sommets quelconques est supérieure ou égale à n donc le graphe est hamiltonien.

Exercice 4 On considère l'algorithme glouton pour le PVC. Cet algorithme consiste à faire qui suit : choisir une ville de départ, aller chaque fois à la ville la plus proche non encore visitée, puis à la fin revenir à la ville de départ.

1. Appliquer cet algorithme à l'exemple du cours, en considérant les six cas possible de départ.
2. Comparer les résultats obtenus entre eux et avec le résultat de l'algorithme ϵ-approché.
3. Proposer une (ou plusieurs) représentations de graphe adaptées pour cet algorithme, ainsi que pour l'algorithme ϵ-approché.

Corrigé 4

1. $C_1 = (a, b, f, d, c, e, a)$ avec $v(C_1) = 66$
   $C_2 = (b, a, c, d, f, e, a)$ avec $v(C_2) = 74$
   $C_3 = (c, a, b, f, d, e, c)$ avec $v(C_3) = 73$
   $C_4 = (d, a, b, f, c, e, d)$ avec $v(C_4) = 75$

$C_5 = (e, a, b, f, d, c, e)$ avec $v(C_5) = 66$
$C_7 = (f, d, c, a, b, e, f)$ avec $v(C_6) = 74$

2. Soit C une des solutions proposée par l'algorithme ϵ-approché (voir transparents) v(C)=78. Remarquer bien que la solution proposée dépend de la représentation du cycle D. Exemple Si D=(c,a,b,a,e,a,f,d,f,a,c) alors C= (c,a,b,e,f,d,c) avec v(C)= 74, etc.
3. La représentation idéale pour l'algorithme Kruskal serait une liste d'arêtes (à trier). La représentation idéale pour l'algorithme d'euler qui sert à construire D serait par liste chaînée de voisins. Cette dernière représentation serait optimale aussi pour l'algorithme glouton. Dans tous les cas nous avons besoin encore d'une liste de sommets pour stocker ceux marqués.

Exercice 5 Appliquer à l'instance du PVC géographique sur six villes : A,B,C,D,E,F, définie par le tableau de distances suivant, la méthode de résolution approchée vue en cours.

	A	B	C	D	E	F
A	-	5.0	12.5	16.5	25.0	14.0
B	5.0	-	11.5	13.5	24.5	16.0
C	12.5	11.5	-	7.0	13.0	9.5
D	16.5	13.5	7.0	-	15.5	16.5
E	25.0	24.5	13.0	15.5	-	14.0
F	14.0	16.0	9.5	16.5	14.0	-