Théorie des Graphes - Tournées eulériennes et hamiltonniennes

Maria Malek

16 février 2009

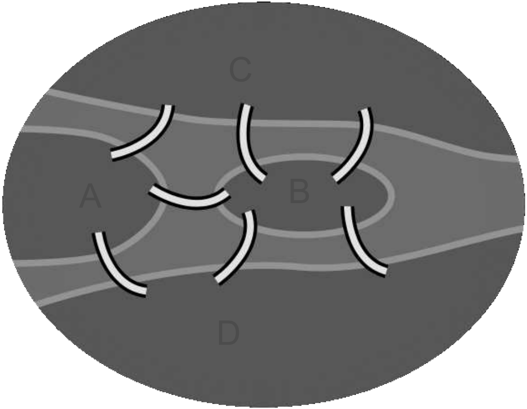
Chaînes et cycles eulériens
- Principal résultat
- Algorithmes

Cycles Hamiltoniens
- Quelques propriétés simples
- Problème du voyageur de commerce
- Notion d'algorithme ϵ-approché
- Approximation du PVC géographique
- Justifications

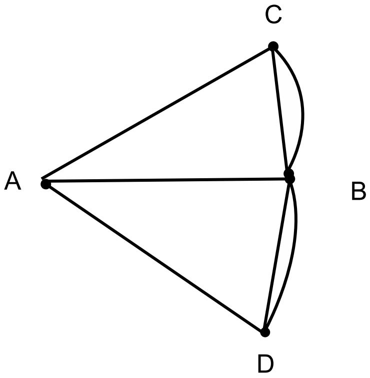
Définitions & Origines

- Une chaîne eulérienne d'un graphe G est une chaîne simple qui contient toutes les arêtes de G (qui passe une fois par chaque arête de G).
- Un cycle eulérien de G est une chaîne eulérienne fermée.
- Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien.
- Origine : Problème des ponts de Konigsberg - ($XVIII^e$ siècle) :
  - Sept ponts disposés sur une fleuve
  - Est ce possible de les traverser, chacun une fois avec retour au même point de départ ?

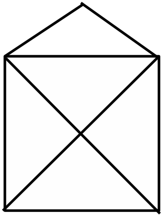
Les ponts de Konigsberg - 1

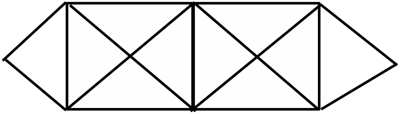


Le Graphe des ponts de Konigsberg - 2



Exemples de graphes eulériens





Théorème d'Euler - 1

- THÉORÈME Un graphe connexe G tel que $m >= 1$ est eulérien ssi tous ses sommets sont de degrés pairs
- PREUVE (la condition nécessaire)
  - En suivant le cycle eulérien de graphe :
  - On passe par chaque sommet un nombre pair de fois car :
  - chaque fois qu'on arrive à un sommet on repart via une autre arête ;
  - Chaque fois, par des pairs d'arêtes différentes, etc.
  - Jusqu'à l'arrivée au point de départ.

Théorème d'Euler - 2 :1

- THÉORÈME Un graphe connexe G tel que $m >= 1$ est eulérien ssi tous ses sommets sont de degrés pairs
- PREUVE (la condition suffisante)
  - Pour m=1 la propriété est vraie (un sommet et une boucle).
  - supposons la propriété est vraie pour un graphe ayant un nombre d'arêtes strictement inférieur à m.
  - Soit un graphe de degré $> m$. Le degré minimale est de 2 (car le graphe est connexe).
  - Soit C un cycle de G. Soit E(C) L'ensemble d'arêtes de C.
  - G-E(C) les composantes connexes du graphe restant.
  - Soient $H_1, .., H_k$ les composantes de G-E(C).

Théorème d'Euler - 2 :2

- THÉORÈME Un graphe connexe G tel que $m >= 1$ est eulérien ssi tous ses sommets sont de degrés pairs
- PREUVE (la condition suffisante - suite)
  - Chaque H_i étant un graphe eulérien (par hypothèse de récurrence)
  - Soit C_i le cycle eulérien de H_i, Il existe au moins un sommet commun x_i entre C et C_i (puisque le graphe G est connexe)
  - On peut définir un cycle eulérien dans le graphe en intercalant C_i dans C au sommet x_i pour chaque i dans $1..k$.

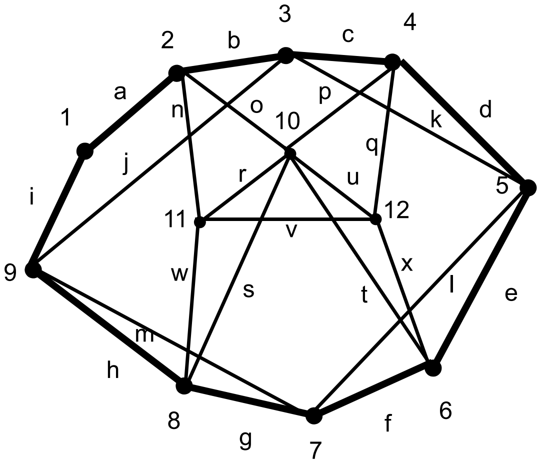
Théorème d'Euler - 3

- COROLLAIRE Un graphe connexe a une chaîne eulérienne ssi le nombre de ses sommets de degrés impairs est $<= 2$.
- PREUVE
  - Tout graphe a un nombre pair de sommets impairs.
  - Si G n'a pas de sommets impairs, il est eulérien et donc a une chaîne eulérienne (fermée).
  - Si G a deux sommet impairs x et y, nous construisons G' à partir de G en ajoutant une arête e entre x et y.
  - Le graphe G' obtenu est eulérien.
  - Le cycle eulérien restreint à G est une chaîne reliant x à y (et ne passant pas par e).

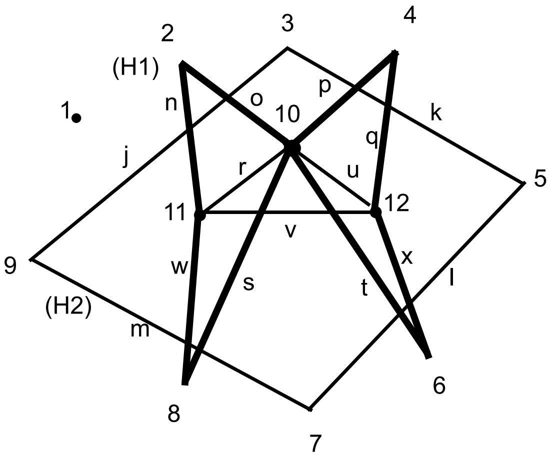
Théorème d'Euler : Algorithme récursif

- **fonction** Euler(G) : cycle
  construire-Cycle(C,G)
  si $E(G) \setminus E(C) <> \Phi$ **alors**
  determiner-Composantes $(H_1, H_2, .., H_k)$
  $i \leftarrow 1$
  tantque $i <= k$ **faire**
  $C_i \leftarrow Euler(H_i)$
  fin tantque
  intercaler $(C_1, C_2, .., C_k)$
  fin si
  RETOURNER C
- Algorithme linéaire : O(m).

Algorithme d'Euler : Exemple - 1



Algorithme d'Euler : Exemple - 2



Algorithme d'Euler : Exemple - 3

- $C = (a, b, c, d, e, f, g, h, i)$
- Deux composantes connexes H_1, H_2
  - $C_1 = (o, u, v, r, p, q, x, t, s, w, n)$ obtenu après appel récursif en intercalant (u, v, r) dans (o, p, q, x, t, s, w, n)
  - $C_2 = (k, l, m, j)$
- Le cycle eulérien :
  $(a, o, u, v, r, p, q, x, t, s, w, n, b, k, l, m, j, c, d, e, f, g, h, i)$

Définitions

- Soit G un graphe simple non orienté, un cycle hamiltonien est un cycle élémentaire qui passe par tous les sommets de G.
- Un graphe G est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.
- Une chaîne hamiltonienne est une chaîne élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe (sans retour obligatoire au point de départ)

Propriétés & Théorèmes

- Un graphe complet k_n avec $n \geq 3$ est hamiltonien (il contient $\frac{(n-1)!}{2}$ cycles différents).
- Un graphe biparti G=(X,Y,E) ne peut être hamiltonien que si $\mid X \mid = \mid Y \mid$
- PROPOSITION 1 Si le graphe G=(X,E) est hamiltonien alors pour $S \subset X$ tel que $S <> \Phi$ et $S <> X$, et si p(G-S) les nombre de composantes connexes du sous graphe G-S on a :

$$p(G - S) \leq \mid S \mid$$

- THEOREME 1 Un graphe simple G=(X,E) est hamiltonien si $d(x) + d(y) >= n$ quelques soient deux sommets non voisins x et y.

Problème du voyageur de commerce : PVC

- Faire la tournée d'un certain nombre de villes en passant une fois par chacune et en retournant à la ville de départ.
- Souhaite rendre minimale la distance parcourue.
- Modélisation : Un graphe G=(X,E) complet K_n valué par $v : E \rightarrow R^+$
- Il s'agit d trouver un cycle hamiltonien C dans G tel que v(C),soit minimal.

PVC : Notion d'algorithme ϵ-approché

- PVC : problème difficile NP-complet non réalisable en temps polynomial ($\frac{(n-1)!}{2}$ cas à tester ! !)
- Stratégie gloutonne échoue ici.
- essayer une *solution approchée*
  - Soit I une instance du PVC, R(I) l'ensemble de solutions réalisables :

$$v^*(I) = min_{C \in R(I)} v(C)$$

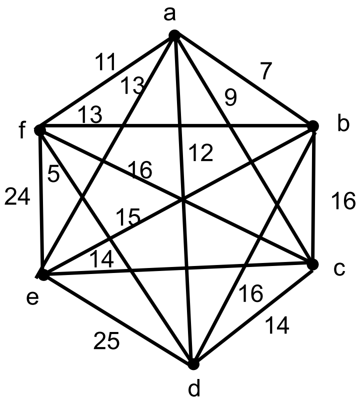
  - $v^*(I)$ correspond à la valeur optimale de I. Si C^* est une solution optimale de I on a $v^*(I) = v(C^*)$
  - Un algorithme ϵ approché est un algorithme qui propose une solution C tel que : $v(C) - v^*(I) \leq \epsilon v(C)$ ou bien :

$$\frac{v(C)}{v^*(I)} \leq \frac{1}{1-\epsilon}$$

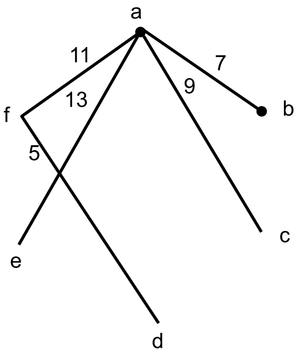
PVC Géographie : Algorithme approché

- Le PVC géographique est un PVC pour lequel l'inégalité triangulaire est vérifiée.
- Soit G(X,E), $\forall x, y, z \in X,\ v(xz) \leq v(xy) + v(yz)$
- Voilà les étapes de l'algorithme :
  1. Construire un arbre couvrant T de G à l'aide de l'algorithme de Kruskal (algorithme linéaire : O(m)).
  2. Doubler chaque arête de T pour obtenir un graphe eulérien U. Trouver le cycle eulérien D de U (algorithme linéaire : O(m)).
  3. Raccourcir la suite de D en supprimant tout sommet déjà rencontré auparavant (parcours linéaire).

PVC Géographie : Algorithme approché - Exemple

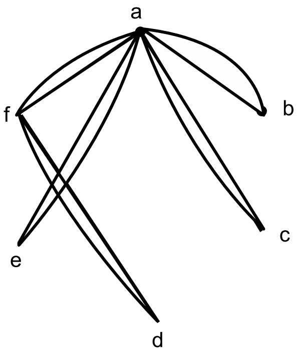


PVC Géographie : Algorithme approché - 1



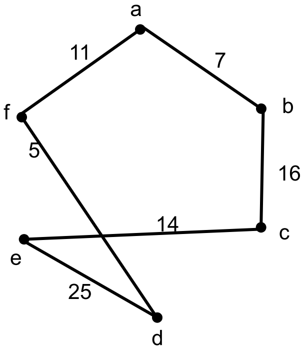
T : L'arbre couvrant

PVC Géographie : Algorithme approché - 2



D=(a,f,d,f,a,e,a,c,a,b,a)

PVC Géographie : Algorithme approché - 3



C=(a,f,d,e,c,b,a)

PVC Géographie : Algorithme approché - Justification

- Soit C le cycle obtenu à l'étape 3. Il est hamiltonien car il passe par tous les sommets de G.
- T l'arbre couvrant minimum vérifie la relation $v(T) \leq v^*(I)$
- La valeur totale du cycle eulérien D : $v(D) = 2v(T)$
- A l'étape 3 un raccourcissement d'une chaîne $(x_1, x_2, .., x_k)$ par $x_1 x_k$ vérifie (grâce à l'inégalité triangulaire) :$v(x_1 x_k) \leq \sum_{i=1}^{k-1} v(x_i x_{i+1})$
- On a ainsi : $v(C) \leq v(D) = 2v(T)$, donc $v(C) \leq 2v^*(I)$ et donc :

$$\frac{v(C)}{v^*(I)} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

- L'algorithme est alors $\frac{1}{2}$-approché pour le PVC géographique.