# Théorie des graphes
# Coloriages de graphes - EISTI - ING 1

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

# Coloriage

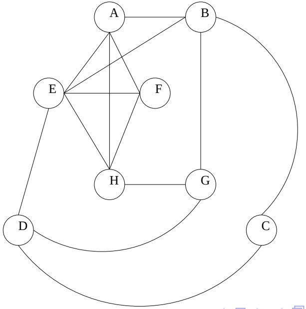
## Définitions

- Le coloriage d'un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets
- Le coloriage est propre si deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur
- Si une coloration propre avec $k$ couleurs est possible, alors le graphe est $k$-coloriable
- Le plus petit entier $k$ pour lequel le graphe est $k$ coloriable est appelé nombre chromatique du graphe, noté $\chi(G)$

# Coloriage

## Exemple d'application

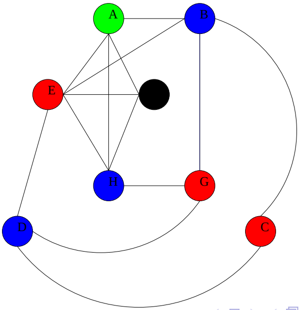
Imaginons un graphe dont les sommets représentent des produits chimiques et dont les arêtes déterminent que deux produits ne peuvent pas être transportés ensemble. Deux sommets de même couleur seront transportés ensemble (même camion par exemple).
Le nombre chromatique du graphe correspond alors au nombre de camions nécessaires.



# Coloriage

## Exemple d'application

Imaginons un graphe dont les sommets représentent des produits chimiques et dont les arêtes déterminent que deux produits ne peuvent pas être transportés ensemble. Deux sommets de même couleur seront transportés ensemble (même camion par exemple).
Le nombre chromatique du graphe correspond alors au nombre de camions nécessaires.



# Algorithmes de coloration

## Algorithme naïf : tester tous les coloriages

- Combinatoire trop grande
- Complexité exponentielle
- Inutilisable en pratique

## Algorithme glouton

Soit $G$ un graphe de $n$ sommets

- Trier les sommets par degrés décroissant
- Tant qu'il reste des sommets non coloriés
  - Chercher le premier sommet non colorié et le colorier avec une nouvelle couleur
  - Colorier avec cette couleur, selon leur ordre, les sommets non coloriés non adjacents au sommet précédent, ni adjacent entre eux.

# Nombre chromatique d'un graphe



## Propriété

Soit $G$ un graphe de $n$ sommets. On note $\Delta(G)$ le degré maximal d'un sommet de $G$. Alors

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

## Preuve :

D'après l'algorithme glouton, si $M$ est le dernier sommet colorié, il est forcément adjacent avec l'ensemble des couleurs déjà utilisées. Ce nombre ne peut être supérieur à $d(M)$. Donc $\chi(G) \leq d(M) + 1 = \Delta(G) + 1$

# Contraction d'un graphe

## Définition

Soit $e = (A, B)$ une arête d'un graphe $G$. Contracter $e$ consiste à construire un nouveau graphe, noté $G.e$, en remplaçant les sommets $A$ et $B$ par un sommet unique, relié à chacun des sommets qui étaient adjacents à $A$ ou $B$ une seule fois et en éliminant $e$ (donc $G.e$ est simple).

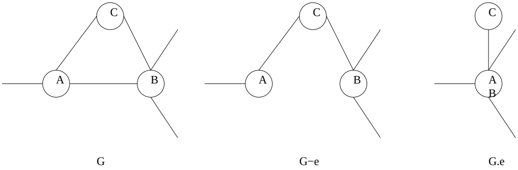



Fig.: Contraction d'une arête

# Polynôme chromatique d'un graphe

## Objectif

Soit un graphe $G$ et une palette de $k$ couleurs. De combien de façon peut-on $k$-colorier $G$.

## Propriété

Soit $G$ un graphe simple de $n$ sommets. Il existe un polynôme $P$ de degré $n$ et à coefficients entiers, tel que, pour tout $k$, le nombre de $k$-colorations de $G$ soit $P(k)$. Ce polynôme est appelé le polynome chromatique de $G$

## Idée de la preuve :

Soit la taille de $G$, $t(G) = n + m$ avec $n$ et $m$ les nombres de sommets et d'arêtes de $G$. Récurrence sur $t(G)$ :

- Si aucune arrête dans $G$, on peut attribuer n'importe laquelle des $k$ couleurs aux sommets : $k^n$ possibilités
- Si $G$ possède au moins une arête $e$, on considère les graphes $G - e$ et $G.e$ de tailles inférieures à $t(G)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que leurs polynomes chromatiques $Q$ et $R$ sont de degrés $n$ et $n - 1$. On montre alors que le nombre de $k$-colorations de $G$ vaut $Q(k) - R(k)$

# Polynôme chromatique d'un arbre



## Propriétés

1. Le polynôme chromatique d'un arbre à n sommets est :

$$P(k) = k(k-1)^{n-1}$$

2. Le polynôme chromatique d'un carré est :

$$P(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2)$$

## Preuves :

Par récurrence, cf TD

# Coloriage d'arêtes

## Objectif

Dans certains cas, il peut y avoir plusieur types de relations entre sommets. On peut alors représenter ces différents types de relations par des arêtes de couleurs différentes

## Exemple

Dans une soirée, des personnes peuvent être amies, ennemies ou ne pas se connaître. On relie les sommets (personnes) par des arêtes de couleurs différentes selon leur type de relation

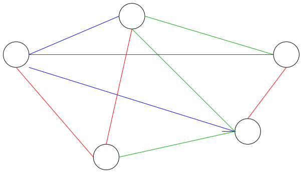


FIG.: Coloriage d'arêtes

# Problèmes extrémaux





## Objectifs

- Par exemple :
  - $n$ point du plan, trois jamais alignés
  - Segments entre certains points
  - Question : quel est le nombre minimal de segments qui assure l'existence d'un triangle
- En général, dans les problèmes extrémaux, on cherche à déterminer la plus grande (ou plus petite) valeur pour laquelle une propriété est vrai (voyageur de commerce, ordonnancement, ...)

# Problèmes extrémaux

## Théorème (Mantel - 1906 & Túran - 1941)

Soit $G$ un graphe simple et non orienté à $n$ sommets ne contenant pas de triangle. Alors $G$ ne possède pas plus de $n^2/4$ arêtes

## Exemple

Un graphe sans triangles de 4 sommets. Il n'a pas plus de $4 * 4/4 = 4$ arêtes :

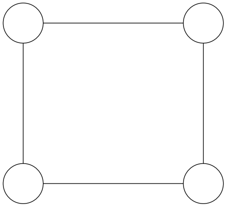


Fig.: Graphe sans triangle

# Problèmes extrémaux

## Théorème (Mantel - 1906 & Túran - 1941)

Soit $G$ un graphe simple et non orienté à $n$ sommets ne contenant pas de triangle. Alors $G$ ne possède pas plus de $n^2/4$ arêtes

## Exemple

Un graphe sans triangles de 4 sommets. Il n'a pas plus de $4 * 4/4 = 4$ arêtes :

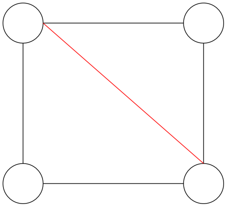


FIG.: Graphe sans triangle

# Problèmes extrémaux

## Théorème (Mantel - 1906 & Túran - 1941)

Soit $G$ un graphe simple et non orienté à $n$ sommets ne contenant pas de triangle. Alors $G$ ne possède pas plus de $n^2/4$ arêtes

## Exemple

Un graphe sans triangles de 4 sommets. Il n'a pas plus de $4 * 4/4 = 4$ arêtes :

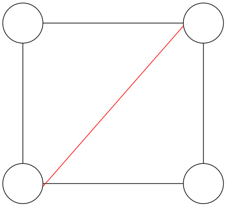


FIG.: Graphe sans triangle