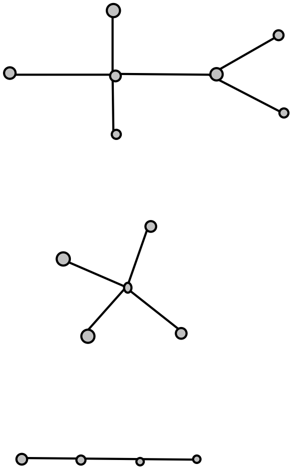
Théorie des Graphes - Les Arbres

Maria Malek

2 mars 2009

- Un arbre est un graphe connexe et acyclique.
- Un arbre est un graphe simple
- Une chaîne élémentaire est en particulier un arbre
- n est le nombre de sommets et m est le nombre d'arêtes.

Exemples d'arbres



Propriété- 1

- PROPOSITION I Un arbre tel que $n >= 2$ possède au moins deux sommets pendants (de degré 1 chacun)
- PREUVE
  - Considérons une chaîne élémentaire maximale (non contenue dans une chaîne élémentaire plus longue) : $(x_0, e_1, x_1, .., e_k, x_k)$
  - Supposons que x_0 ait une arête incidente $f <> e_k$ la reliant avec un sommet y alors
    - Si y est l'un des sommets de la chaîne $(y = x_i, f, x_0, e_1, x_1, .., x_i)$ est un cycle dans le graphe ! !
    - Sinon
      $$(y, f, x_0, e_1, x_1, .., e_k, x_k)$$
      est une chaîne plus longue que la chaîne précédente ! !
  - Donc, dans les deux cas : contradiction

Propriété - 2

- PROPOSITION II Si G est un arbre on a m=n-1
- PREUVE
  - Pour n=1, m= 0, Raisonnons par récurrence :
  - G est arbre, soit x un sommet pendant de G.
  - G-x est un graphe connexe et acyclique donc G'=G-x est arbre dans lequelm $m_{G'} = n_{G'} - 1$
  - Or $n_G = n_{G'} + 1$ et $m_G = m_{G'} + 1$ on en déduit que $m_G = n_G - 1$

Propriété - 3

- PROPOSITION III Dans un arbre deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne élémentaire unique
- PREUVE (éléments)
  - La chaîne élémentaire existe car l'arbre est connexe
  - Il faut démontrer l'unicité de la chaîne :
    - On démontre que l'existence de deux chaînes reliant x à y nous ramène à un cycle ! !

Les forêts

- Une forêt est un graphe acyclique.
- les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.
- PROPOSITION IV Dans une forêt G on a $m <= n - 1$
- PREUVE
  - Soient $C_1, C_2, .., C_p$ les composantes connexes de G, Pour chacune nous avons :

$$m_i = n_i - 1$$

  - $\sum_{i=n}^{p} m_i = \sum_{i=n}^{p} n_i - \sum_{i=n}^{p} 1$
  - $m = n - p$, p étant le nombre de composantes $p >= 1$
  - Donc $m <= n - 1$

Les Isthmes - 1

- Un Isthme d'un graphe est une arête e telle que G-e a une composante connexe de plus que G :
- Donc dans G-e, les extrémités de e ne sont pas reliées par une chaîne.
- LEMME 1 Une arête d'un graphe G est un isthme ssi elle n'appartient pas à un cycle de G
- PROPOSITION V Dans un arbre toute arête est un isthme

Les Isthmes - 2

- LEMME 1 Une arête d'un graphe G est un isthme ssi elle n'appartient pas à un cycle de G
- PREUVE
  - Considérons le cas où G est connexe, Soit e une arête de G ayant x et y comme extrémités
  - Si e n'est pas un isthme, alors il existe une chaîne élémentaire dans G-e qui relie x et y. Cette chaîne constitue avec e un cycle fermé dans G.
  - Soit le cycle $C = (x_0, e_1, x_1, e_2, ..., x_{k-1}, e_k, x_0)$ avec $e = e_1$
  - Soit u,v deux sommets de G-e, Ils sont reliés dans G par $D = (u = y_0, f_1, y_1, .., f_k, y_k = v)$ Si cette chaîne ne passe pas par e cette une chaîne de G-e ! !
  - Sinon $e = f_i$ ayant comme extrémités y_{i-1} et y_i
  - Remplaçons dans D l'arête f_i par la chaîne suivante obtenue à partir de C : $(y_{i-1} = x_0, e_k, x_{k-1}, ..., e_2, x_1 = y_i)$
  - La chaîne D' relie u et v dans G-e ! !

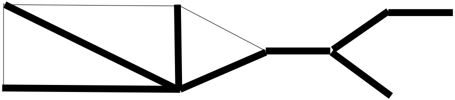
Caractéristiques des arbres

- THÉORÈME 1 Les conditions suivantes pour un graphe G sont équivalentes :
  1. G est un arbre.
  2. G est connexe et on m=n-1.
  3. G est acyclique et on m=n-1.
  4. G est connexe et toute arête est un isthme
  5. Dans G deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne élémentaire unique.

Arbres couvrants - 1

- Un arbre couvrant d'un graphe G est un graphe partiel de G qui est un arbre.
- PROPOSITION VI Un graphe connexe G a au moins un arbre couvrant.
- PREUVE
  - On retire de G les arêtes non isthmes,
  - le graphe partiel obtenu est connexe et ne contient plus de cycles. C'est donc un arbre

Exemple d'arbre couvrant



Arbres couvrants - 2

- COROLLAIRE I Si G est connexe alors $m >= n - 1$
- PREUVE
  - Comme G est connexe il contient un arbre couvrant T.
  - $m_G >= m_T = n_T - 1 = n_G - 1$
  - Le cas d'égalité correspond à G=T.

Arbres couvrants - 3

- PROPOSITION VII Un graphe partiel d'un graphe connexe G est un arbre couvrant de G ssi il est connexe et minimal avec cette propriété relativement à la suppression d'arêtes.
- PREUVE
  - Condition nécessaire : voir PROPOSITION V
  - Condition suffisante : Soit T un graphe partiel de G connexe et minimal ;
  - Pour toute arête e, T-e n'est pas connexe, donc e n'est pas isthme de T selon le *THÉORÈME I (4)* : T est un arbre.

Arbres couvrants - 4 :1

- PROPOSITION VIII Un graphe partiel d'un graphe connexe G est un arbre couvrant de G ssi il est acyclique et maximal avec cette propriété relativement à l'ajout d'arêtes.
- PREUVE de la condition nécessaire
  - Soit T un arbre couvrant de G. Soit e une arête de G qui n'appartient pas à T :
  - Les extrémités de e sont reliées dans T (T est connexe).
  - Cette chaîne simple avec l'arête e définit un cycle dans T+e.
  - Donc, T est acyclique maximal.

Arbres couvrants - 4 :2

- PROPOSITION VIII Un graphe partiel d'un graphe connexe G est un arbre couvrant de G ssi il est acyclique et maximal avec cette propriété relativement à l'ajout d'arêtes.
- PREUVE de la condition suffisante
  - Il suffit de démontrer que T est connexe
  - Soient x,y deux sommets de T, Il existe une chaîne D de G reliant les deux sommets.
  - Si D a toutes ses arêtes dans T la démonstration est faite.
  - Sinon, soit e une arête de de D qui n'est pas dans T, alors T+e a un cycle C qui contient e, donc selon *LEMME 1* : e n'est pas un isthme.
  - Il existe donc dans T une chaîne qui relie les deux extrémités de e (u et v).
  - On remplace dans D l'arête e par cette chaîne.
  - On procède ainsi sur toutes les arêtes de D qui ne sont pas dans T, On obtient à la fin une chaîne dans T qui relie x et y.

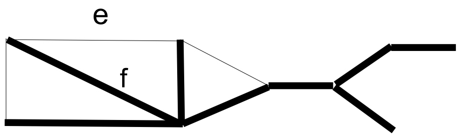
Arbres couvrants - 5

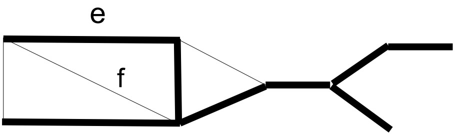
- PROPOSITION IX Étant donné un arbre couvrant T de G et une arête e de G qui n'appartient pas à T. T+e contient un seul cycle élémentaire
- PREUVE
  - Selon la *proposition VIII* T+e contient un cycle.
  - Si e appartient à deux cycles différents alors il existe dans T deux chaînes élémentaires reliant ses extrémités (x et y)
  - Donc, contradiction avec la *proposition III*.

Arbres couvrants - 6

- LEMME II (L'échange) Étant donné un arbre couvrant T de G et une arête e de G qui n'appartient pas à T et une arête f du cycle T+e, alors T+e-f est un arbre couvrant de G.
- PREUVE
  - Selon le *théorème I* T+e-f est connexe car l'arête f n'est pas un isthme de T+e puisqu'elle appartient à un cycle.
  - D'autre part nous avons on a :
    $m_{T+e-f} = m_T = n_T - 1 = n_{T+e-f} - 1$

Exemple de l'échange

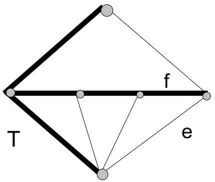


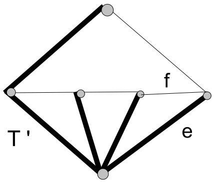


Arbres couvrants - 7

- LEMME III (L'échange fort) Étant donnés deux arbres couvrants T et T' de G et une arête $e \in T' \setminus T$, il existe une arête $f \in T \setminus T'$ telle que T+e-f et T'+f-e sont des arbre couvrants de G.

Exemple de l'échange fort





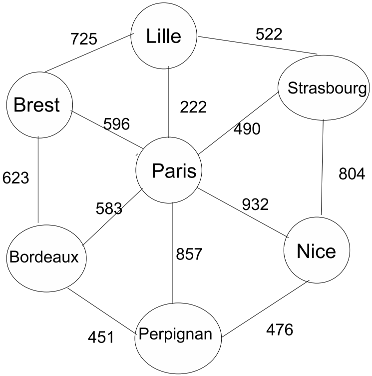
Arbres couvrants & Graphes valués

- Soit G =(X,E) un graphe valué par une application $v : E \longrightarrow R^{*+}$
- Nous désignons par τ_G l'ensemble des arbres couvrants de G.
- Pour chaque $T \in \tau_G$, notons par v(T) la somme des valeurs par v des arêtes de T.
- Deux arbres couvrants T et T' sont dits voisins dans τ_G s'il existe deux arêtes e et f telles que : $T' = T + e - f$ et $T = T' + f - e$

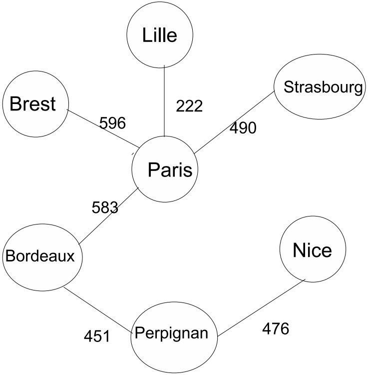
Problème de l'arbre couvrant minimum

- Étant donné un graphe simple connexe G =(X,E) valué par l'application v dans R^+.
- Trouver un graphe connexe de G : T=(X,A) tel que $c(T) = \Sigma_{e \in A} v(e)$ soit minimum.
- T est nécessairement un arbre couvrant sinon on contredit la minimalité ! !

Exemple du problème



Exemple de la solution



Problème de l'arbre couvrant minimum : solution

- La recherche exhaustive d'une solution est très coûteuse.
- Examen de tous les arbres couvrants possibles ! !
- procédé très coûteux, estimé en milliers de siècles ! ! !
- On applique l'algorithme glouton qui n'arrive pas forcement à la solution optimale.
- En s'appuyant sur la *proposition XIII* on ajoute au fur et à measure une arête e qui ne créé pas de cycle avec celles déjà retenues, tel que v(e) soit minimum.

Algorithme de Kruskal

- **procedure** Kruskal (G,v)
  $F \leftarrow E$
  $A \leftarrow \Phi$
  tantque $|A| < n - 1$ **faire**
    Trouver $e \in F$ tel que v(e) soit minimum
    $F \leftarrow F - e$
    si $G(A \cup \{e\})$ est acyclique **alors**
      $A \leftarrow A \cup \{e\}$
    fin si
  fin tantque

Algorithme de Kruskal : complexité

- Evaluation de la complexité de :
  - *Tri des arêtes à tester* : tri rapide O(m*log(m)).
  - *Gestion des composantes connexes de G(A)* : Procédure un peu compliquée mais qui peut se faire en $O(m * \alpha(n))$ α étant une fonction très lente avec une valeur inférieur à 4.
  - L'algorithme de Kruskal est pratiquement linéaire (si les arêtes sont déjà triées).