Théorie des Graphes - Généralités

Maria Malek

23 janvier 2009

Avant Propos

- Notion de graphe est récente (formellement au cours du XX^e siècle).
- Domaine : Informatique fondamentale, Optimisation, Complexité algorithmique.
- Application : Ordonnancement de tâches, Chemins optimaux dans un graphe, Propriétés de réseaux , Connectivité, etc.
- Histoire & Origines
  - Problèmes des ponts de Konigsberg : théorème d'Euler, ($XVIII^e$ siècle).
  - Problème des quatres couleurs : XIX^e siècle.

Définition des Graphes
- Notations & Représentation
- Terminologie
- Isomorphismes
- Graphes Planaires
- Graphes Complets

Sous-graphes
- Notations

Chaînes et cycles

Degrés

Connexité

Graphes Bipartis

Représentation en machine

Graphes Valués

Un graphe (non orienté) G est défini par :

- Un ensemble X de sommets (non vide).
- Un ensemble E d'arêtes (qui peut être vide).
- A chaque arête e sont associés deux sommets x et y appelés extremités de e.

Notations

- On note G=(X,E), X(G), E(G).
- On note n le cardinal de G : le nombre de sommets.
- On note m le cardinal de E.
- On note xy la paire d'une arete e (ou yx).

Représentation

- On dessine le Graphe sur un plan.
- Les sommets sont représentés par des points.
- Les arêtes sont représentées par des lignes simples.

Exemple d'un graphe

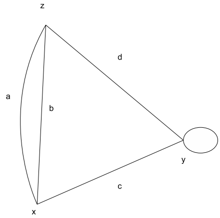


FIGURE: X={x,y,z}, E={a,b,c,d,e}

Terminologie

- x et y sont les extrémités d'une arête e :
  - e relie x et y, x et y sont voisins.
  - L'arête e est incidente au sommet x et au sommet y.
  - Si x=y e est appelé boucle.
  - Deux arêtes e et e' ayant les mêmes extrémités sont dites parallèles (ou multiples).
- Un graphe est dit simple s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples.
- Dans un graphe simple une arête s'identifie à ses deux extrémités : e=xy
- On associe à un graphe non simple G le graphe simple sousjacent défini ainsi :
  - il a le même ensemble de sommets que G ;
  - deux sommets sont reliés par une arête ssi ils sont distincts et reliés par (au moins) une arête dans G.

Isomorphisme de graphes non orientés

- Un isomorphisme d'un graphe G=(X,E) sur H=(Y,F) est défini par :
  - une bijection $\Phi : X \rightarrow Y$ et une bijection $\Psi : Y \rightarrow X$ tq :
  - si $e \in E$ et $x, y \in X$ on a :
  - l'arête $\Psi(e)$ a pour extrémités $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$ dans H *ssi* e a pour extrémités x et y dans G.
- Deux graphes isomorphes sont identiques en structures et se distinguent par l'ensemble de sommets et d'arêtes (autrement dit par les étiquettes associées aux sommets et aux arêtes)

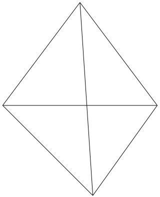
Graphes Planaires

- Graphes dont la représentation plane vérifie la condition suivante :
- Deux lignes arêtes ne se coupent pas en dehors d'extrémités communes (s'il y en a).
- Nous étudierons plus tard leurs propriétés.
- Ils ont un rôle important pour le problème de coloration.

Graphes Complets

- Graphes simples tq deux sommets distincts sont reliés par une arête.
- Un graphe complet est déterminé par n : le nombre de sommets, et est noté K_n.
- Le nombre d'arêtes : $m = \frac{n(n-1)}{2}$.
- D'une façon générale dans un graphe simple nous avons : $m <= \frac{n(n-1)}{2}$.

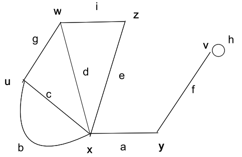
Exemple d'un graphe complet



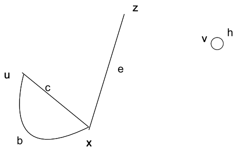
Sous-Graphes

- Soit G=(X,E), H=(Y,F) est un sous-graphe de G ssi
  - $Y \subset X$et $F \subset E$ sont tels que toute arête de F a ses extrémités dans Y.
- Un sous graphe H de G est dit engendré si F est l'ensemble d'arêtes de E qui ont leurs extrémités dans Y. Ce graphe est noté G_Y. Remarquer que $G_X = G$.
- Un sous graphe H de G est dit couvrant si $Y = X$. On dit aussi que H est graphe partiel de G.
- Le sous graphe engendré par F est le graphe (X,F) ; on le note G(F).

Exemples de sous graphes - 1

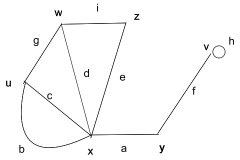


G

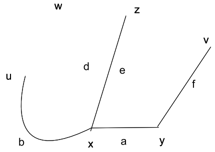


Graphe engendré
G{x,u,v,z}

Exemples de sous graphes - 2



G



Graphe partiel : G({a,b,e,f})

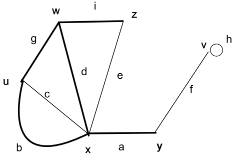
Notations

- $G - X$ où $Y \subset X$: sous graphe de G engendré par $X \setminus Y$
- $G - F$ où $F \subset E$: sous graphe partiel de G engendré par $E \setminus F$.
- $G - x$ est noté $G - x$.
- $G - e$ est noté $G - e$.
- par extension on notera l'ajout d'une arête e à un graphe par $G + e$.

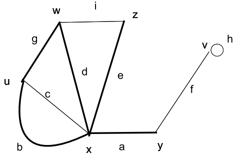
Chaînes

- Une chaîne d'un graphe G=(X,E) est une suite de la forme : $(x_0, e_1, x_1, .., e_k, x_k)$ tq :
  - x_i est un sommet du graphe, e_{i+1} est une arête qui relie x_i à x_{i+1}.
  - k est la longueur de la chaîne, $k >= 0$.
  - x_0 et x_k sont les extrémités de la chaîne.
- Lorsque G est simple, une chaîne peut être définie par la suite des sommets $(x_0, x_1, .., x_k)$.
- Une chaîne est dite simple si ses arêtes $\{e_i\}$ sont deux à deux distinctes.
- Une chaîne est dite élémentaire si ses sommet $\{x_i\}$ sont deux à deux distinctes.
- Une chaîne élémentaire est simple !

Exemples de chaînes - 1

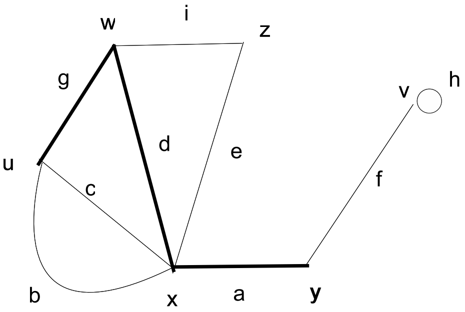


Chaîne non simple:
y,a,x,d,w,g,u,b,x,d,w,i,z



Chaîne simple non élémentaire :
y,a,x,d,w,g,u,b,x,e,z

Exemples de chaînes - 2



Chaîne élémentaire
y,a,x,d,w,g,u

Chaînes

- LEMME I Si dans un graphe deux sommets sont reliés par une chaîne alors ils sont reliés par une chaîne élémentaire.
- PREUVE
  - Soit une chaîne qui relie les deux sommet x_0 et $x_k$dans laquelle apparaît le même sommet deux fois $x_i = x_j$:
  - $(x_0, e_1, x_1, .., x_i, e_{i+1}, ..., x_j, ...e_k, x_{k+1})$
  - nous pouvons raccourcir la chaîne en enlevant la sous chaîne qui relie x_i et x_j
  - nous obtenons alors : $(x_0, e_1, x_1, .., x_i = x_j, ...e_k, x_{k+1})$
  - nous répétons le même procédé tant qu'il existe un sommet qui se retrouve deux fois dans la chaîne raccourcie, etc.

Cycles

- Un Cycle est une chaîne de longueur $>=1$ simple et fermé : $(x_0, e_1, x_1, .., e_k, x_0)$
- Un cycle de longueur 1 correspond à un sommet contenant une boucle.
- Dans un graphe simple un cycle est une suite de sommets : $(x_0, x_1, .., x_0)$
- Un cycle est élémentaire si ses sommets sont deux a distincts.
- Un cycle peut être pair ou impair (sa longueur).
- Remarquer que dans un graphe simple le même cycle peut être désigné différemment
  - $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_0)$
  - $(x_3, x_4, x_0, x_1, x_2, x_3)$
  - $(x_0, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$

Degrés

- On appelle degré d'un sommet x le nombre d'arêtes incidentes à x. (une boucle compte deux fois).
- Exemple d(w)=3 (dans la dernière figure vue auparavant)
- Un sommet de degré nul est dit isolé.
- PROPOSITION II Dans un graphe quelconque G on a $\sum_{x \in X} d(x) = 2m$
- COROLLAIRE II Dans un graphe le nombre de sommets de degrés impairs est pair.
- On note le degré minimum d'un graphe δ_G et le degré maximum Δ_G.
- PROPOSITION III $n\delta_G <= 2m <= n\Delta_G$

Graphe Régulier

- Un graphe G est dit régulier lorsque les degrés de ses sommets sont tous égaux.
- Si le degré commun est égal à k, on dit que le graphe et k-régulier.
- Dans un graphe k-régulier nous avons : $nk = 2m$

Graphe Connexe

- Un graphe G est connexe si quelque soient deux sommets de G, ils sont reliés par une chaîne.
- Les composantes connexes d'un graphe G sont les sous graphes engendrés connexes maximaux.
- Les composantes connexes d'un graphes sont à deux deux disjointes.

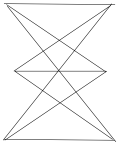
Graphes Bipartis - 1

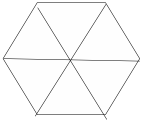
- Un graphe G est bipartis si son ensemble de sommets peut être divisé en deux parties disjointes tq toute arête a un extrémité dans chaque classe.
- On note un graphe biparti G par G=(X,Y,E) où X,Y sont les deux parties disjointes (ou les classes).
- Un graphe biparti n'a pas de boucles.
- Un graphe biparti G=(X,Y,E) est complet si toute paire de sommets de X et de Y est une arête.

Graphes Bipartis - 2

- THÉORÈME IV Un graphe est biparti ssi il n'a pas de cycle impair.
- PREUVE (elements)
  - Condition nécessaire : par l'absurde
  - Condition suffisante : marquer les sommets alternativement avec 0 et 1, raisonner éventuellement sur un marquage consécutif de 11 ou 00. Trouver la contradiction ! !

Exemples de graphes bipartis





Représentation en machine - 1

- Trois représentations possibles :
  1. tableau ou liste des arêtes :

arêtes	extrémités	
1	1	2
2	3	1
3	3	3
4	2	4

  2. Matrice d'adjacence.
  3. Liste des voisins.

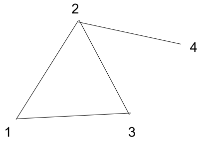
Représentation en machine - 2

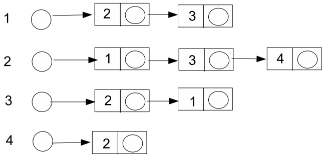
- Trois représentations possibles :
  1. tableau ou liste des arêtes.
  2. Matrice d'adjacence :

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	1	1	0	0
4	0	1	0	0

  3. Liste des voisins.

Représentation en machine - 3





Graphes Valués

- Un graphe dont les arêtes sont valuées.
- Un graphe valué G(X,E) est un graphe avec une application : $v : E \rightarrow R$
- Un graphe valué *peut être représenté* par une matrice d'adjacence.
- L'absence d'une arête entre deux sommets x_i et x_j est représentée par : $v(x_i, x_j) = \infty$ ssi $(x_i x_j) \notin E$
- Par extension, $v(x_i, x_i) = 0$