Examen de rattrapage de théorie des langages

1$^{\text{er}}$juillet 2011

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.
Les réponses non ou mal justifiées seront pénalisées.
Le barème est indicatif.
Aucun document autorisé.
Machines (ordinateurs et calculatrices) interdites.
Durée : 1h 30min

1 Pa(s)lindromes mais presque

Nous souhaitons écrire un ensemble de grammaires permettant de détecter des mots dont les préfixes correspondent aux suffixes écrit à l'envers, que nous nommerons les "presque pa(s)lindromes". Pour simplifier, nous nous contenterons d'un alphabet sur 2 lettres, $A = \{a, b\}$.

1.1 Presque pa(s)lindromes rationnels

La première grammaire, la plus simple, permet de reconnaître les presque pa(s)lindromes rationnels dont le préfixe est ab (et donc le suffixe ba). Par exemple les mots $abaabba$ et $abaaabbbbaabbbba$ appartiennent au langage mais pas le mot $aaaabbbba$.

1. Énumérer tous les mots d'au plus 6 lettres reconnus par cette grammaire.
2. Écrire un automate non déterministe permettant de reconnaître ces presque pa(s)lindromes.
3. Utiliser la mise en équation et le lemme d'Arden afin d'en déduire une expression régulière associée.
4. En déduire une version déterministe de l'automate en appliquant la technique des quotients gauches.

1.2 Presque pa(s)lindromes algébriques

La seconde grammaire, un peu plus expressive, permet de reconnaître les presque pa(s)lindromes algébriques dont les préfixes sont $a^n b$ (et donc les suffixes ba^n), pour tout $n > 0$.

1. Énumérer tous les mots d'au plus 6 lettres reconnus par cette grammaire.
2. Écrire une grammaire algébrique permettant de reconnaître ces presque pa(s)lindromes.
3. Appliquer l'algorithme de CKY afin de déterminer si le mot *aabbaa* est bien un presque pa(s)lindromes algébrique.

1.3 Presque pa(s)lindromes ordonnés

La troisième grammaire, toujours plus expressive, permet de reconnaître les presque pa(s)lindromes ordonnés dont les préfixes sont $a^n b^p$ (et donc les suffixes $b^p a^n$), pour tout $n, p > 0$.

1. Énumérer tous les mots d'au plus 6 lettres reconnus par cette grammaire.
2. Quel est le type de cette grammaire (justifier votre réponse) ?
3. En déduire une machine abstraite (automate à états finis déterministe, automate à pile ou machine de Turing) qui reconnaît ce langage.

2 Machines qui calculent, ou pas

Pour les exercices suivants, vous devez expliquer le fonctionnement de vos machines, en plus de leur construction.

1. Construire une machine de Turing qui calcule le "ou exclusif" de 2 nombres binaires (xor vu en électronique et en logique appliqué bit à bit) séparés par un marqueur, disons s.
2. Construire une machine de Turing qui reconnaît les palindromes sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.

Bonus

Quel célèbre écrivain français est l'auteur d'un palindrome de plus de 1000 mots ?