Cartouche du document

Année : ING 1
Matière : Théorie des langages
Activité : Examen

Objectifs

Cet examen porte sur :
- les grammaires régulières et hors contexte ;
- les automates finis déterministes ou non ;
- langages rationnels : les quotients gauches et les systèmes d'équations des automates ;
- langages algébriques : l'algorithme de CKY et les automates à pile ;
- Les machines de Turing.

Tous les documents sont autorisés.

Durée : 1h30

Les ordinateurs sont autorisés mais seulement en fonctionnement local.

Vous devez rendre des copies papiers.

Sommaire des exercices

Corps des exercices

1 - Polynômes formels

Énoncé :

On définit formellement les polynômes à coefficients entiers de la façon suivante :
- 1) les noms des variables sont de la forme X suivi de 0 à plusieurs chiffres
- 2) un paramètre est un nombre entier
- 3) un nombre entier est une succession finie de chiffres
- 4) le symbole d'addition est +
- 5) le symbole de soustraction est -
- 6) le symbole du produit est *
- 7) le symbole de puissance est ^
- 8) un polynôme est une somme algébrique (+ et -) de monômes
- 9) un monôme est le produit d'un paramètre par une puissance de la variable X

Question 1)

Énoncé de la question

Barême 2.5 points

L'énoncé définit le langage des polynômes formels à coefficients entiers. On vous demande de séparer les règles de l'énoncé en lexicales d'une part et syntaxiques d'autre part.

Question 2)

Énoncé de la question

Barême 2.5 points

En déduire une grammaire pour vérifier qu'une expression (d'un polynôme formel) est syntaxiquement correcte.

2 - Langage hors contexte et algorithme CKY

Énoncé :

Dans cet exercice, on étudie la grammaire suivante :

// La grammaire d'une expression complètement parenthésée
Les terminaux : T = { opérateurB,opérande, (,) }

Les non terminaux : N = { S, ES }

Régles de production : P = {
Règle : ES —> opérande
Règle : ES —> ES opérateurB opérande
Règle : S —> (ES)
Règle : S —> (S opérateurB S)
}

.

Question 1)

Énoncé de la question

Barême 2.5 points

Mettre cette grammaire sous forme normalisée de Chomsky.

Question 2)

Énoncé de la question

Barême 2.5 points

Montrer que l'expression (opérande opérateurB opérande) est complètement parenthésée à l'aide de l'algorithme de Coke, Younger et Kasami.

3 - Automates à états finis

Énoncé :

Soit le langage sur {0, 1} reconnaissant les nombres binaires qui sont des multiples de 4.

Question 1)

Énoncé de la question

Barême 1 point

Écrire un automate d'états finis déterministe qui reconnaît ce langage.

Question 2)

Énoncé de la question

Barême 2 points

Utiliser le lemme d'Arden pour trouver l'expression régulière de ce langage.

Question 3)

Énoncé de la question

Barême 2 points

Vérifiez votre réponse à la première question en utilisant la méthodes des quotients gauches.

4 - Langage et grammaire

Énoncé :

On considère le langage suivant : $\{ a^i b^j a^{i+j+k} b^k / i, j, k >= 0 \}$.

Question 1)

Énoncé de la question

Barême 2 points

Écrire une grammaire engendrant ce langage.

Question 2)

Énoncé de la question

Barême 1 point

En déduire la classe de langages engendrée par cette grammaire.

Question 3)

Énoncé de la question

Barême 2 points

Selon le cas, construire une machine (Automate d'états finis, Automate à pile, Machine de Turing) permettant de reconnaître ce langage.

Cartouche du document

Année : ING 1
Matière : Théorie des langages
Activité : Examen

Objectifs

Cet examen porte sur :
- les grammaires régulières et hors contexte
- Les automates finis déterministes ou non
- Langages rationnels : Les quotients gauches et les systèmes d'équations des automates
- Langages algébriques : L'algorithme de CKY et les automates à pile
- Les machines de Türing

Tous les documents sont autorisés

Durée : 2H00 heures

Les ordinateurs sont autorisés mais seulement en fonctionnement local.

Vous devez rendre des copies papiers

Sommaire des exercices

1 - Langages et automates
2 - Langages hors contexte
3 - Machines de Türing
4 - Un peu de réflexion

Corps des exercices

1 - Langages et automates

Enoncé :

Soit le langage des chaînes de **a** et de **b** tel que toutes les occurences de **b** soient de longueur **1**. Les chaînes comme **baabaaaa**, **aaaab** et **b** appartiennent au langage.

Question 1)

Enoncé de la question

Définir une expression régulière de ce langage en utilisant les opérateurs suivants:
- répétition d'un symbole : *,+
- opérateur d'union : |
- opérateurs de concaténation : ., (,)

Exemple $a^+.b(a|b)^*$

Question 2)

Enoncé de la question

Trouver l'automate minimal associé à ce langage par la méthode des quotients gauches.

Question 3)

Enoncé de la question

Donner le système d'équations correspondant à cet automate.

Question 4)

Enoncé de la question

Utiliser le lemme d'Arden afin de vérifier que le langage obtenu par résolution du système d'équation correspond bien à celui trouvé lors de la première question.

2 - Langages hors contexte

Enoncé :

On considère la grammaire suivante :

```
// La grammaire de notre petit langage a^n b^n avec n > 0
// Cette grammaire est bien algébrique mais pas rationnelle
Les terminaux : T = { a,b }

Les non terminaux : N = { S }

L'axiome : S = S

Régles de production : P = {
 Règle : S —> a b
 Règle : S —> a S b
 }
```

Question 1)

Enoncé de la question

Montrer que la grammaire qui suit est une normalisation au sens de Chomsky de la grammaire ci-dessus.

```
// La grammaire de notre petit langage a^n b^n avec n > 0
// Cette grammaire est normalisée au sens de Chomsky
Les terminaux : T = { a,b }

Les non terminaux : N = { S, V, B, A }
```

L'axiome : S = S

Régles de production : P = {
Règle : A —> a
Règle : B —> b
Règle : V —> S B
Règle : S —> A B
Règle : S —> A V
}

Question 2)

Enoncé de la question

Avec la grammaire normalisée au sens de Chomsky ci-dessus, on a appliqué l'algorithme de CKY à la chaîne **a a a b b b**.

On trouve le tableau suivant :

Le mot	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6
a	A	∅	∅	∅	?	?
a	A	∅	∅	S	?	--
a	A	S	V	∅	--	--
b	B	∅	∅	--	--	--
b	B	∅	--	--	--	--
b	B	--	--	--	--	--

La colonne Etape$_j$ représente les sous mots de longueur ~~j~~ i. La ligne L_i représente la position du sous mot dans le mot initial. En résumé, dans la case (i,j) on s'intéresse au sous mot de longueur i extrait du mot initial à partir du symbole i.

1) Compléter le tableau pour finir l'application de l'algorithme de ~~Chomsky~~ CKY

2) Qu'est ce qui indique dans ce tableau complété que la chaîne $a^n b^n$ appartient au langage ?

3) Dans notre cas que signifie de trouver l'axiome S dans la case (3,2) ?

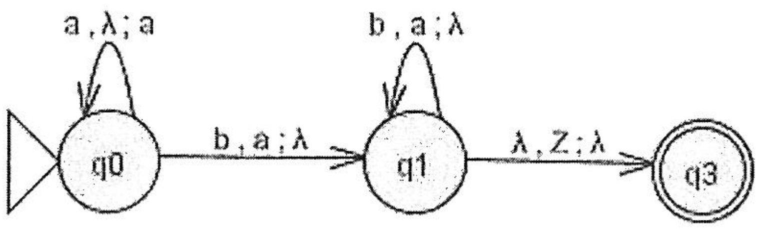
Question 3)

Enoncé de la question

On considère le langage $(a^n b^n)^*$.

Définir un automate à pile qui reconnaît ce langage.

On vous redonne l'automate à pile du langage $a^n b^n$.



.

3 - Machines de Türing

Question 1)

Enoncé de la question

Ecrire une machine de Turing qui calcule (écrit sur la bande) le nombre 2* X + 1 à partir du nombre X codé en binaire.

4 - Un peu de réflexion

Question 1)

Enoncé de la question

Sachant que dans un ordinateur, l'enregistrement du code se fait par le même encodage que les données et sur un même support.

Quelle est parmi les trois propositions suivantes celle qui modélise le mieux un ordinateur :

- un automate à états finis
- un automate à pile
- une machine de Turing

Justifier votre réponse.