Théorie des Graphes

SHAKOOR Modesar

8 mars 2011

Chapitre 1

TD 1

1.1 Exercice 1

Nous modélisons ce problème par un graphe non orienté.

Un sommet représente une personne et une arête représente la relation "serrer la main" entre deux personnes.

Le nombre de sommet est $n = 5$ dans ce graphe et le degré d'un sommet est égal à 3 (si le graphe existe bien sur).

Nous savons que la somme des degrés dans un graphe est pair :

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2m$$

où m est le nombre d'arêtes.

Nous remarquons que $2m = 15$ pour ce problème donc c'est impossible (le graphe n'existe pas).

1.2 Exercice 2

Soit C_x la composante connexe du graphe G (supposé simple) à laquelle appartient x.

C_x étant un graphe vérifiant la propriété :

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2m$$

Il existe dans C_x un autre sommet de degré impair (le sommet y).

Puisque C_x est connexe alors il existe une chaîne reliant x à y.

Si le graphe G a exactement deux sommets impairs, alors ces deux sommets appartiennent à la même composante connexe, et donc ils seront reliés par une chaîne.

1.3 Exercice 3

1.3.1 1

S'il y a un sommet x de degré 0, alors ce sommet est isolé, on considère alors le graphe G' contenant les $(n-1)$ autres sommets.

Un sommet $y <> x$ (y différent de x) a au plus un degré qui est égal à $(n-2)$ s'il est relié à tous les sommets de G'.

S'il y a un sommet x de degré $(n-1)$, alors il est relié à tous les autres dans G. Donc il n'existe pas de sommets de degré 0 dans G.

1.3.2 2

Dans un graphe ayant n sommets :

$$d(x) \in 1, n, ..., n-1$$

(ou exclusif)

$$d(x) \in 0, ..., n-2$$

Donc il existe n sommets chacun ayant un degré dans un ensemble de cardinalité $n-1$.

Donc il existe forcément deux sommets ayant le même degré.

1.4 Exercice 5

G est k-régulier donc le degré de chaque sommet est égal à k.

Puisque le graphe est biparti, le nombre d'arêtes incidentes à X est égal au nombre d'arêtes incidentes à Y. Ce nombre est égal à m :

$$|X| = \frac{m}{k}, |Y| = \frac{m}{k}$$

1.5 Exercice 6

$M =$

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	1	1	0	0
4	0	1	0	0

$M^2 =$

	1	2	3	4
1	2	1	1	1
2	1	3	1	0
3	1	1	2	1
4	1	0	1	1

$$M^3 = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline
2 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ \hline
3 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline
4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

Par définition, la valeur 1 dans $M^1[i,j]$ signifie qu'il existe une chaine de longueur 1 qui relie x_i à x_j qui est l'arête même.

Supposons que la propriété est vraie pour M^k et démontrons la pour M^{k+1}.

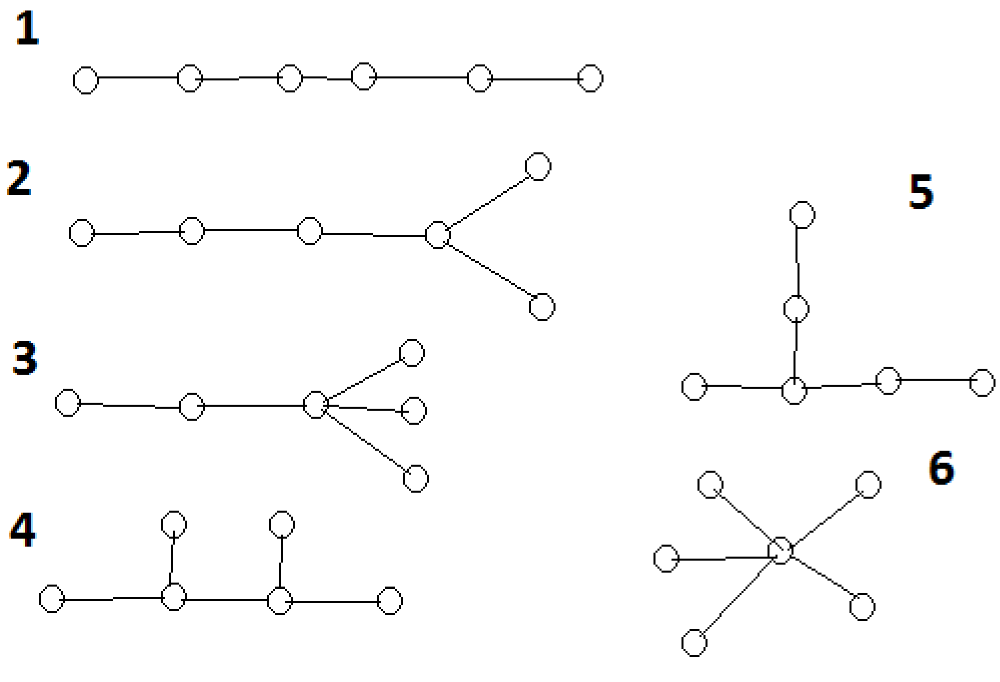
$$M^{k+1}[i,j] = \sum_{l \in 1,\ldots,n} M^k[i,l]M[l,j]$$

S'il existe une chaine de longueur k qui relie i à l cette chaine sera comptabilisée dans le calcul du nombre de chaines de longueur k+1, si M[l,j] = 1, autrement dit s'il existe une arête entre x_l et x_j.

Chapitre 2

TD 2

2.1 Exercice 1



2.2 Exercice 2

Pour les arbres de l'exercice précédent, on a des Δ de 3 pour l'arbre 4, de 3 pour le 5 et de 5 pour le 6.

Soit x_i le sommet ayant le degré maximum Δ.

Soit e_{ik} une arête incidente à x_i, $e_{ik} \in e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{i\Delta}$.

Nous choisissons la chaîne élémentaire la plus longue dont l'extrêmité est x_i et dont la première arete est e_k.

Soit $C = (x_i, e_{ik}, ..., e_j, x_j)$, démontrons que x_j est pendant.
Si x_j n'est pas pendant alors il existe $f <> e_j$ tel que f relie x_j avec un sommet y.
- $y \in C$ donc l'arbre contient un cycle.
- $y \notin C$ donc $(x_i, e_{ik}, ..., e_j, x_j, f, y)$ est plus longue que C.

Donc x_j est pendant.

On remarque bien que deux chaînes partant de x_i et traversant deux arêtes différentes e_{ik} et e_{il} sont disjointes, sinon on aura un cycle dans l'arbre. Donc il existe Δ sommets pendants différents.

2.3 Exercice 3

2.3.1 Enoncé

Les conditions suivantes pour un graphe G sont équivalentes :
- 1) G est un arbre
- 2) G est connexe et on a $m = n - 1$
- 3) G est acyclique et on a $m = n - 1$
- 4) G est connexe et toute arête est en isthme
- 5) Dans G deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne élémentaire unique

Le lemme 1 donne 4 implique 1.
Le théorème V donne 1 implique 4.
Le théorème II donne 1 implique 3.
Le théorème II donne 1 implique 2.
Le théorème III donne 1 implique 5.

2.3.2 Démonstration

Démonstration de 5 implique 1

On sait que G est connexe car deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne. Il reste à démontrer que G est acyclique.

Supposons que G contient un cycle qui passe par les sommets x et y, cela signifie qu'il existe deux chaînes élémentaires entre x et y.

Donc G est un arbre.

Démonstration de 2 implique 1

G est connexe, on suppose qu'il n'est pas acyclique.

Trouvons l'arbre couvrant de G en procédant par retrait des arêtes non isthmes.

Soit G' l'arbre couvrant (toutes ses arêtes sont isthmes).

$m_{G'} = n - 1$ donc $m_{G'} = m$, le nombre d'arêtes retirées de G est 0 d'où G est un arbre.

Démonstration de 3 implique 1

G est acyclique, G est une forêt. Soit $C_1, C_2, ..., C_p$ les composantes connexes de G, nous savons que $m = n - p$, p étant le nombre de composantes connexes.

Or $m = n - 1$ donc $p = 1$. Il existe une seule composante connexe donc G est connexe.

2.4 Exercice 4

Montre qu'une arête e d'un graphe connexe G appartient à tout arbre couvrant de G si et seulement si e est un isthme.

Soit e une arête isthme de G. Soit T un arbre couvrant qui ne contient pas e. T+e contient un cycle (proposition IX).

Soit e une arête qui appartient à tous les arbres couvrants de G. Supposons que e est non isthme dans G alors selon la proposition VI qui décrit la construction d'un arbre couvrant à partir du graphe G, il est possible de retirer e dès le début de G.

L'arbre couvrant résultat T ne contiendra pas e. Donc e n'appartiendra pas à tous les arbres couvrant de G. Donc e est isthme.

Puisque e est isthme, les deux extrêmités de e ne sont pas reliées dans T. Donc T n'est pas connexe, d'où T contient e.

Chapitre 3

TD 3

3.1 1

3.1.1 glouton

On tri les sommets par degré décroissant.
4 couleurs sont nécessaires (4 camions)

3.1.2 mieux

3 couleurs sont suffisantes (3 camions)
Puisqu'il existe des sous-graphes complets ayant 3 sommets, il n'est pas possible de colorier ce graphe de moins de 3 couleurs différentes.

3.2 2

Nous construisons un graphe dont les sommets sont les matières.
Une arête entre deux matières signifie que les élèves concernés par les deux matières sont dans la même option (on ne peut pas faire deux examens en parallèle).
Le nombre chromatique de ce graphe étant égal à 3. Il faut 3 plages horaires d'examens, en tout : 3*3 = 9 h.

3.3 3

On considère le graphe G complet de 6 sommets représentant les personnes. Les arêtes sont bleues si les personnes se connaissent, rouge sinon. Il faut démontrer qu'il existe un triangle monochromatique.
Soit A une personne, parmi les 5 arêtes incidentes à A, au moins 3 sont d'une même couleur, par exemple bleue, vers les sommets B, C, D.

3.4 4

On considère un graphe dont les sommets sont les 2009 aéroports. Deux sommets sont reliés ssi il y a un vol direct entre eux. D'après l'énoncé le graphe est sans triangle. D'après le théorème de Túran, le graphe contient au maximum : $\frac{(2009)^2}{4} \approx 1000000$ arêtes.

3.5 5

On considère le graphe G de sommets étudiants, reliés par une arête s'ils ont eu la meilleure note dans une matière. Donc chaque matière correspond à un triangle unique auquel on associe une couleur différente.

Comme un seul étudiant a les meilleures notes dans 2 matières, deux triangles monochromatiques ont toujours un sommet en commun.

Il faut déterminer n, le nombre de triangle pour qu'un même élève ait la meilleure note dans chacune des matières.

3.5.1 1

On remarque que si 4 triangles ont un sommet commun, alors tous les triangles ont ce sommet.

En effet, un cinquième triangle doit avoir 4 sommets en commun avec les 4 triangles qui partagent le sommet X.

Ce sommet en commun ne peut être que X.

3.5.2 2

Démontrons que $n \geq 8$ implique qu'un seul élève a la meilleure note dans chaque matière.

En effet, un triangle T possède un sommet commun avec au moins 7 autres triangles. Donc un des sommets de T est commun à trois autres triangles, on se retrouve dans le premier cas et on a démontré que si $n \geq 8$ tous les triangles partagent le même sommet.

3.5.3 3

Donner un contre exemple pour $n = 7$.

Pour $n = 7$, notons les élèves A, B, C, D, E, F, G.

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	X	X				
2	X			X	X		
3		X		X		X	
4			X	X			X
5	X					X	X
6		X			X		X
7			X		X	X	

Effectivement pour $n = 7$ cela ne marche pas (les sommets communs sont multiples), la condition est bien $n \geq 8$.

Chapitre 4

TD 4

4.1 Exercice 1

4.1.1 1

Il n'y a pas de solutions au problème des ponts de Konigsberg car le graphe n'est pas eulérien (il y a des sommets de degré impair).

Le graphe étant constitué comme suit : les sommets sont les régions et les arêtes les ponts.

On trouve alors des sommets de degré 3 ou 5.

4.1.2 2

Soient G_1 et G_2 les deux figures, ce ne sont pas des graphes eulériens car selon le théorème d'Euler les degrés de tous les sommets doivent être pairs pour que le graphe accepte un cycle eulérien.

Par contre G_1 et G_2 ont une chaîne eulérienne car il existe seulement deux sommets de degré impair (corollaire d'Euler).

4.2 Exercice 2

En étudiant la démonstration (la condition suffisante) du théorème d'Euler, on constate que les cycles constituant l'ensemble $C, C_1, C_2, C_3, ..., C_k$ sont toujours disjoints et que l'union de ces cycles (par les points d'intercalation) correspond au cycle eulérien du graphe eulérien.

4.3 Exercice 3

4.3.1 1

S'il existe un cycle élémentaire dans G, c'est que G n'est pas un arbre. Autrement dit $m \neq n - 1$.

La somme des degrés dans un graphe est $2 \times m$.

Le degré minimal étant σ, $2 \times m \geq n \times \frac{n}{4}$.
D'où $m \geq n \times \frac{n}{4}$.
Pour $n \geq 3$, on en déduit que $m \geq n$.
Donc le graphe n'est pas un arbre, autrement dit il comporte un cycle élémentaire.

4.3.2 2

Selon le théorème I du cours, la somme des degrés de deux sommets est supérieure ou égale à n ($\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$) donc le graphe est hamiltonien.

4.4 Exercice 4

L'exemple dont on parle se trouve page 20 du cours.

4.4.1 1

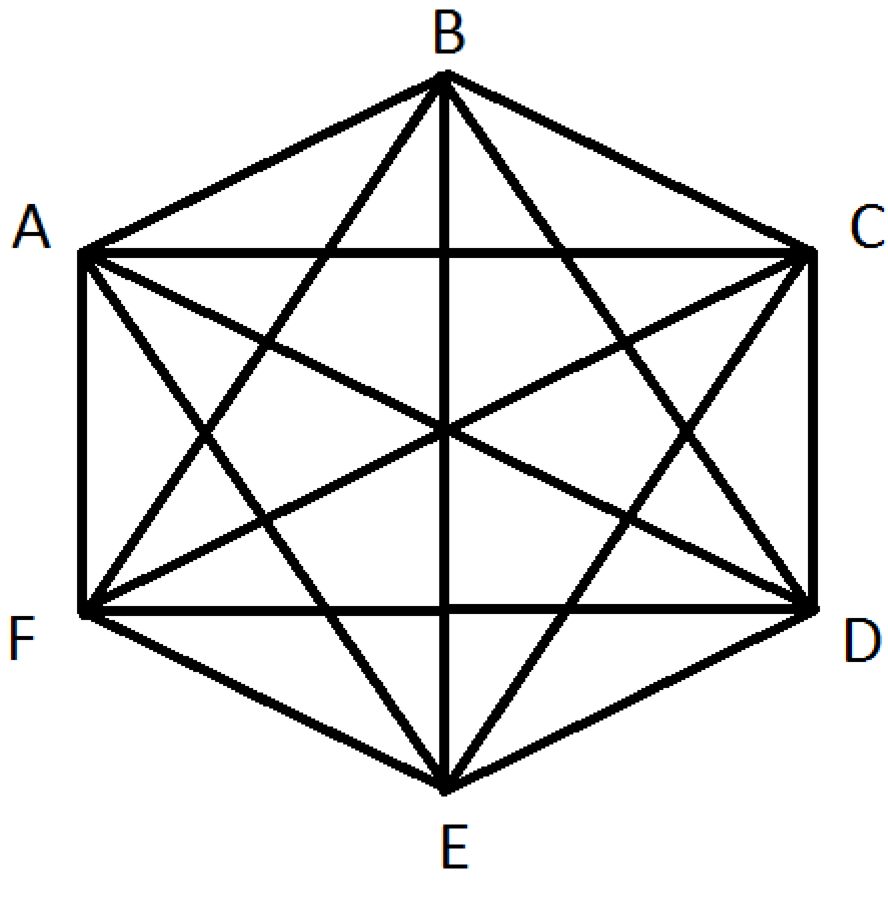
C_1 : a b f d c e a
$v(C_1) = 7 + 13 + 5 + 14 + 14 + 13 = 66$
C_2 : b a c d f e a
$v(C_2) = 74$
C_3 : d a b f c e d
$v(C_3) = 75$

4.4.2 2

L'algorithme ϵ-approché avec $\epsilon = 1/2$
D'abord il faut trouver l'arbre couvrant (en utilisant Kruskal).
Ensuite, on dédouble les arêtes, puis on trouve un cycle eulérien D qu'on simplifie pour le rendre hamiltonien.
Pour l'exemple, l'arbre couvrant est représenté page 21 du cours.
On trouve D = a f d f a e a c a b a, puis C = a f d e c b a d'où v(C) = 78.

4.5 Exercice 5

La matrice est symétrique car le graphe est non orienté.
Kruskal : On part d'un arbre vide, pour considère chaque arête de G dans l'ordre croissant des poids, si l'ajouter à l'arbre n'ajoute pas de cycle, on l'ajoute. On continue jusqu'à ce que le cardinal de A égale n-1.
On cherche alors un cycle eulérien : D = A B C F C D C E C B A et on ne garde que les premières occurences de chaque lettre : C = A B C F D E A.
On a alors $v(C) = 5 + 11.5 + 9.5 + 16.5 + 15.5 + 25 = 83$.


B
A
C
F
D
E

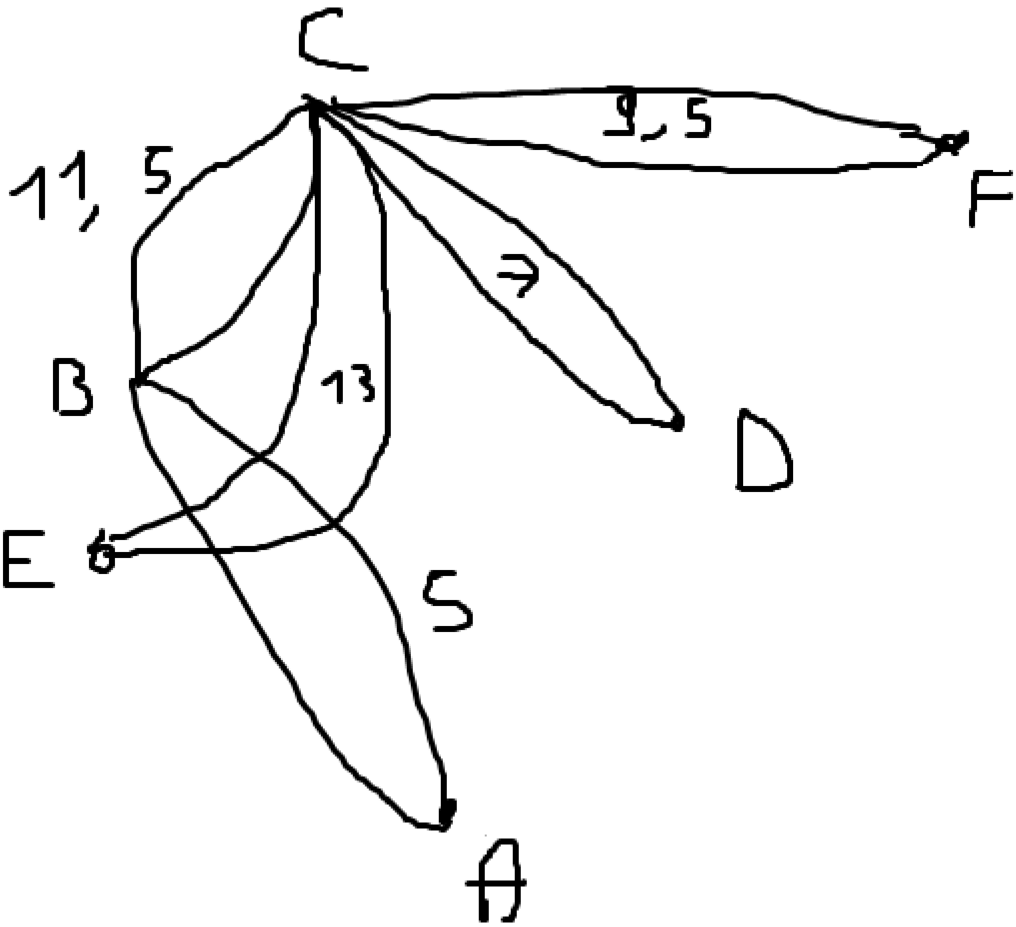

C
11, 5
9, 5
F
7
B
13
D
E
5
A

Table des matières