Théorie des Graphes - 1

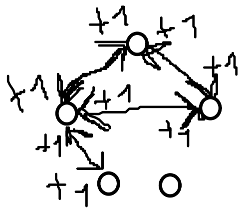
mercredi 22 janvier 2014
14:57

<u>TD1 Exercice 1:</u>

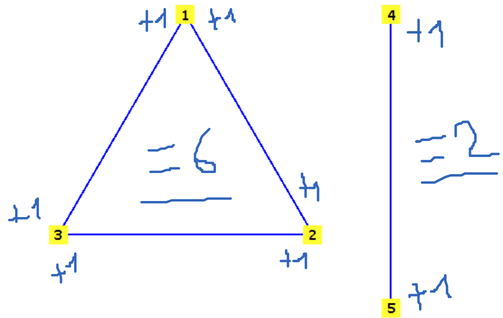
->Lemme de la poignée de main(handshake Lemma)
Du point de vue du sommet, chaque poignée de main implique deux personnes.

Pour que 5 personnes serrent la main à 3 personnes chacune,
il faut que les sommets appartiennent(avec multiplicité) à 3x5 arêtes. (nombre impair)
Sommets avec multiplicité = Degrés.

Or, ce nombre est toujours pair. -> Lorsqu'une personne serre la main à deux personnes, on a 4 sommets avec multiplicités(A1->A2 et A1->A3)
Chaque poignée de main donnée ajoute 2 sommets. ->Chaque arête donnée ajoute 2 -> On n'arrive jamais à 3x5 = 15.



<u>TD1 Exercice 2:</u>



Dans n'importe quel graphe, la somme des degrés est toujours paire.
C'est aussi vrai pour chacune de ses composantes connexes. (Parties séparées)

On s'intéresse à Gx, la composante connexe de x.
Selon l'énoncé, x est de degré impair.
Or, la somme des degrés de Gx est paire.
Donc, les autres ne peuvent pas tous être de degré pair.
Il existe donc forcément un sommet de degré impair relié à x.

<u>TD1 Exercice 3:</u>

1) Si le sommet x est de degré 0 (relié à 0 sommets), il est isolé.
Donc, les autres ont un degré maximal de (n-1)-1 => <u>n-2</u>.

Soit A: x de degré 0(qui est isolé) et B: un sommet de degré n-1(qui voit tout le monde)

On vient de montrer que A => non B
D'où B => non A.

2) On a n sommets, ayant chacun leur degré.
Ces degrés sont choisis soit dans {0,1,..n-2}, soit {1,2,…,n-1}, qui sont tous deux des ensembles de cardinal n-1.
Par le principe des tiroirs(de Dirichlet), au moins 2 degrés sont identiques.

3)

Théorie des Graphes - 2

mercredi 29 janvier 2014
14:09

Utiliser Maple pour tester l'algo de Kruskel:
A partir d'un graphe standard, on crée un arbre avec les arêtes les moins coûteuses (coûts renseignés à l'avance.)

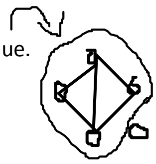
On regarde uniquement des graphes non-orientés.

Ecrits sous la forme G = (V,E) = (S,A)
Vertices,Edges
Sommets,Arêtes

Nb Sommets = |S| = n
Nb Arêtes = |A| = m

Nombre d'arêtes dans un graphe complet = [n(n-1)]/2 **(Voir cours écrit)**

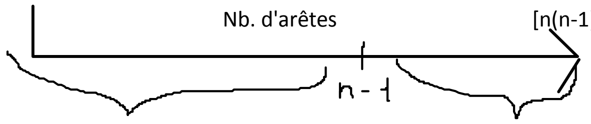
Un sous-graphe complet s'appelle une clique.



0

Nb. d'arêtes

[n(n-1)]/2



Graphe complet

Graphe creux

Graphe dense

Un arbre est un graphe connexe acyclique.

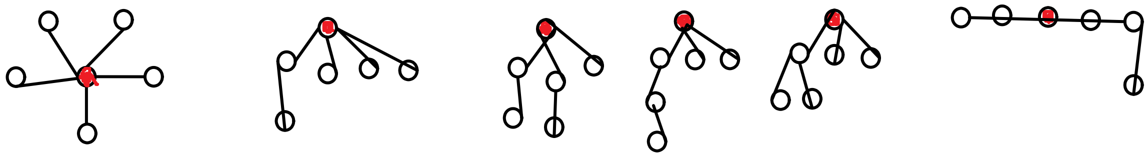
Si on ajoute une arête, il devient cyclique, si on en enlève une, on perd la connexité.

Avec strictement moins que n-1 arêtes, le graphe ne **peut pas être connexe**
Avec strictement plus que n-1 arêtes, le graphe ne **peut pas être acyclique**

Les arbres ont donc tous exactement n-1 arêtes.

<u>TD2 Exercice 1:</u>

Donner l'ensemble des arbres comportant exactement 6 sommets.
On les ordonne par degré max. (Voir feuille)
On ne prend que les modèles principaux, les versions isomorphes ne sont pas comptées.



Dmax = 5 Dmax=4 Dmax=3 Dmax=2

<u>TD2 Exercice 2:</u>

Montrer qu'un arbre a au moins Δ sommets pendants. (Δ = Degré max)
(Un sommet pendant = sommet de degré 1 = 1 sommet avec une liaison uniquement)

Lorsqu'on part du sommet ayant le degré max, on a Δ chemins possibles.
Ces chemins ne se recroisent pas (sinon il y a cycle) et ils se terminent tous par au moins un sommet pendant (sinon il y a cycle).
Donc, il y a **au moins Δ sommets pendants.**

Soit x_i un sommet de degré maximal. Soit ei_k une arête incidente à x_i. (ei_k € {ei_1,ei_2,ei_3,...,ei_Δ}).
On considère une chaîne élementaire plus longue dont la première arête est ei_k.

Soit C = (x_i,ei_k,...e_j,x_j) la chaîne élementaire.
Montrons que x_j est pendant. Si il n'est pas pendant, alors il existe une arête f différente de e_j tel que f relie x_j avec un sommet y.

On a 2 cas à considérer:
-Soit y appartient à C et on a un cycle =>Contradiction.
-Soit y n'appartient pas à C et C'=(...,e_j,x_j,f,y) est une chaîne plus longue que C qui était supposée maximale =>Contradiction.
Donc x_j est pendant.

Théorie des Graphes - 3

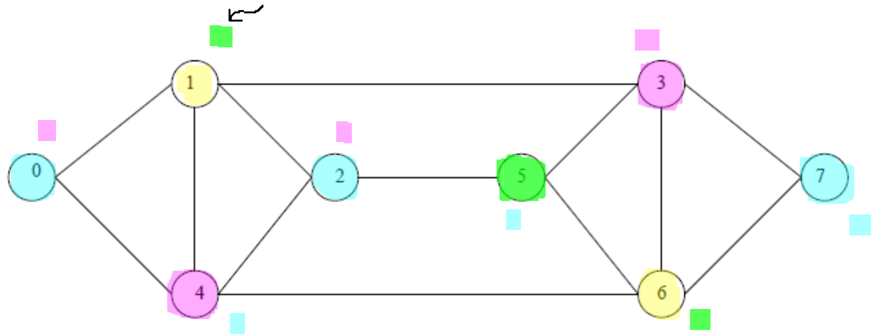
mercredi 5 février 2014
14:11

Un graphe est *k-coloriable* si deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur(coloration propre) avec *k* couleurs.

Le plus petit *k* pour lequel le graphe est *k-coloriable* est le **nombre chromatique** du graphe.

TD3 Exercice 1

S.optimale

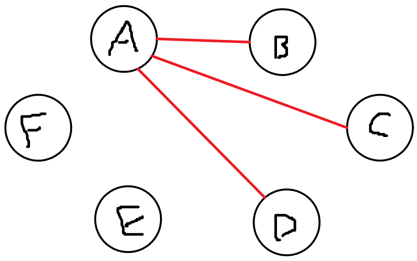


Algorithme glouton
Soit G un graphe de n sommets.
- Trier les sommets par degré décroissant
- Tant qu'il reste des sommets non coloriés
- Chercher le premier sommet non colorié et le colorier avec une nouvelle couleur
- Colorier avec cette couleur, selon leur ordre, les sommets non coloriés non adjacents au sommet précédent, ni adjacent entre eux.

On classe les sommets par degré decroissant: $\underbrace{1,3,6,4}_{\text{deg } 4},\underbrace{2,5,0,7}_{\text{deg } 2}$.

On a donc 4 couleurs. Le nombre chromatique est 3, donc il existe une meilleure solution.
Cette solution obtenue via algorithme glouton ne donne pas la solution optimale.

TD3 Exercice 3



Exemple.

Se connaissent
Ne se connaissent pas

Montrer qu'il existe forcément un triangle monochrome.

Si on prend A, il est relié à 5 autres éléments.
Donc, au moins 3 de ces liens sont du même type. (Principe des tiroirs)

==> A est relié à un sous-ensemble de {B,C,D,E,F} et non relié au complémentaire de ce sous-ensemble.
Le plus grand de ces sous-ensembles est au moins de cardinal 3. (3 liens du même type)
Sans perte de généralité, on supposera que c'est l'ensemble des sommets auxquels il est relié.

Si on considère que A connaît B, C et D, on considère le triangle BCD.
Soit {B,C,D} ne se connaissent pas, et donc on a un triangle BCD,
Soit au moins 2 se connaissent, et ils forment un triangle avec A.

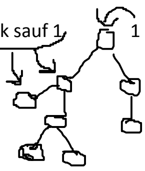
TD3 Exercice 4

Utilisation du théorème de Tùran:
Dans un graphe sans triangles de sommets n, le nombre max d'arêtes est de **$n^2/4$.**

Dans cet exemple, le pays a 2009 aéroports. => 2009 sommets. Le nombre maximal de vols directs est donc de $2009^2/4$ = 1 million.

TD3 Exercice 6

1 parmi k sauf 1

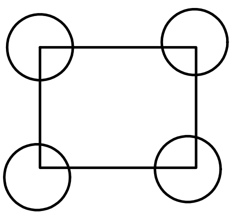


1 parmi k

Avec un nombre de couleurs fixe, combien de colorations puis-je faire?
Dans un arbre:
On choisit un sommet quelconque et on lui attribue une des k couleurs.

D'où P(k) = k*(k-1)*(k-1)*...*(k-1)
=**k(k-1)^(n-1)**

TD3 Exercice 7



Théorie des Graphes - 4

vendredi 14 février 2014
10:58

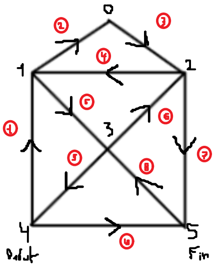
Parcours Eulerien: Par toutes les arêtes.
Parcours Hamiltonien: Par tous les sommets.

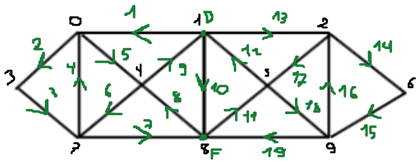
TD4 Exo 1

1)La liste des degrés est {3,3,3,5}

Donc tous les degrés ne sont pas pairs, donc il n'y a pas de cycle eulerien. => Pas de solution du pb des pts de Konisberg.

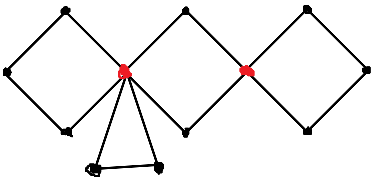
2)4 et 5 sont les deux sommets de degré impair.
Il faut commencer par un sommet de degré impair pour atteindre l'autre sommet de degré impair.





TD4 Exo 2

Ce graphe n'a aucun sommet de degré impair.
On voit ici qu'il y a 4 cycles euleriens.
Tous ces cycles sont disjoints(indépendants)
Leur union par des points particuliers(rouges ici) correspond au cycle eulerien du graphe.



TD4 Exo 3

1) Soit un graphe avec 3 ou plus nœuds et un degré supérieur ou égal à nœuds/2.

Nombre d'arêtes total >= n*(n/2) * 1/2

Dés que n*(n/2)*1/2 > n-1, le graphe est cyclique, car il a strictement **plus** d'arêtes qu'un arbre avec le même nombre de sommets.

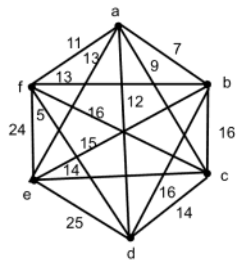
Or, n²/4 > n-1. dès que n²-4n+4 > 0, soit (n-2)² > 0.

2) Si pour tous sommets s1 et s2, d(s1) + d(s2) >= n, alors le graphe contient un cycle hamiltonizn.

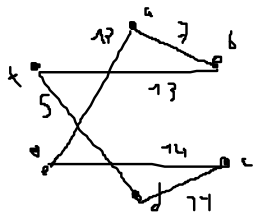
Or ici, d(s1) + d(s2) >= n/2 + n/2 = **n.**

TD4 Exo 4

Exemple du cours -------------------->



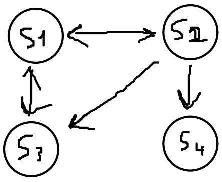
Application de l'algo glouton ------>



Théorie des Graphes - 5

vendredi 21 février 2014
10:56

Exercice 2



Graphe orienté.

S = {S1,-S2,S3,S4}
A = { (S1,S2),(S1,S3), (S2,S1), (S2,S3), (S2,S4), (S3,S1) }

Matrice d'adjacence M:

Destination Origine	S1	S2	S3	S4
S1	0	1	1	0
S2	1	0	1	1
S3	1	0	0	0
S4	0	0	0	0

Que vaut M²?

$$M^2 = \begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

M²[2,3] = M[2,1] * M[1,3] + M[2,2] * M[2,3] + M[2,3] + M[3,3] + M[2,4] + M[4,3]
La multiplication de M^k par M correspond à trouver les chemins de longueur k entre 2 sommets suivi d'un arc supplémentaire.

Cas de base

Par définition, la valeur 1 dans la case [i,j] de la matrice M^1 signifie qu'il existe un chemin de longueur 1 entre i et j, à savoir l'arc (i, j).

Héredité

On admet la propriété vraie au rang k.

$$M^{k+1}[i,j] = \sum_{l\in S}^{n} M^k[i,l] * M[l,j]$$

Donc s'il existe dans M^k une chaîne de longueur k qui relie i à l, alors elle sera comptabilisée dans le calcul du nombre de chaînes de longueur k+1 si M[l,j] = 1, ie si il existe un arc de l à j.

Exercice 3

Sans circuit => Nilpotentie

Un chemin sans circuit passe par chaque sommet au plus une fois.

Donc, $M^{|S|} = 0$

Nilpotente => Sans circuit
Circuit => Non nilpotente

Si il existe un circuit de longueur k1 dans G, alors il existe un terme diagonal $M^{k1}[i,i]$ qui est non nul.

Pour tout multiple entier de k1, l*k1 avec l $\in N, M^{lk1}[i,i] \neq 0$.

Exercice 5

Appliquer l'algo de tri topologique: