Théorie des Graphs, TD n°4

Exercice 1

1. Il n’y a pas de solutions au problème des ponts de Konigsberg.

En effet, il suffit de construire le graphe connexe associé au pb (4 sommets de degré 3,3,3 et 5) et d’après le théorème d’Euler, ce problème n’a pas de solutions car son nombre de sommets qui a un degré impair n’est pas nul ( pas de cycle eulérien ) et ni égal à 0 ou 2 (pas de chaîne eulérienne).

1. Il faut partir par un des sommets de degré impair (l’autre sommet de degré impair sera l’arrivée).

Exercice 2

Il faut montrer que si un graph n’a pas de sommet de degré impair, alors l’ensemble des arêtes peut être partitionné en cycle élémentaire.

Démonstration par récurrence ( sur le nombre d’arêtes )

* Si m =3

Il est évident que le cycle élémentaire contient toutes les arêtes.

* Hypothèse de récurrence : Un graphe ayant un nombre d’arêtes inférieur ou égal à m vérifie la ppté.
* Généralisation : On considère un graph G ayant m+1 arêtes.

On part d’un sommet quelconque s. Or tous les sommets sont pairs => à chaque fois que l’on arrive à un sommet s’, on peut en repartir. On avance ainsi jusqu’à revenir au sommet s. On construit ainsi un cycle qui n’utilise aucune arête en double : C1.

On pose G’ = G – arêtes utilisées par C1. On a alors, que le nombre d’arêtes utilisées par G’ est inférieur ou égal à m.

On applique alors l’hypothèse de récurrence : G’ = C2 U C3 … U Cn.

On arrive donc à C = C1 U C2 U C3 … U Cn.

Exercice 3

On considère un graph connexe simple avec $n\geq 3 et δ\geq \frac{n}{2}.$

1. Il faut montrer que G possède un cycle. Or comme G est connexe, cela revient à montrer que G n’est pas un arbre.

Nous avons :

$$δ\geq \frac{n}{2}$$

* $\sum\_{}^{}d\left(s\right)\geq \sum\_{}^{}δ\geq \frac{n^{2}}{2}$
* $2m\geq \frac{n^{2}}{2}$
* $m\geq \frac{n^{2}}{4}$

Or $\frac{n^{2}}{4}\geq n pour n\geq 3$

* $m\geq n>n-1 donc il possède un cycle.$
1. Il faut montrer que G est Hamiltonien (s’inspirer du théorème de Dirac)

Théorème du cours : Un graph simple G=(X,E) est hamiltonien si
$d\left(x\right)+ d\left(y\right)\geq n$ quelques soient deux sommets non voisins x et y.

Ici on a $δ\geq \frac{n}{2}.$ Donc pour deux sommets quelconques et ne particulier pour deux sommets non voisins, on a :

$d\left(x\right)+ d\left(y\right)\geq δ+ δ\geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}\geq n$.

Exercice 4

1. Appliquer l’algo du cours
2. Comparer les résultats entre eux et avec l’algo e-approché
3. Proposer une représentation