Théorie des Graphes : TD n°2

Exercice 1

Exercice 2

Soit G un arbre de degré D. Il existe au moins un sommet de degré delta. Soit x ce sommet. Soient les arêtes ayant x comme extrémité.

Pour chaque arête soit la chaîne élémentaire la plus longue partant de x via, c.-à-d. que Il faut démontrer que x’ est un sommet pendant.

Supposons que x’ ne soit pas pendant, alors il existe un autre sommet x’’ relié à x par une arête. Il y a alors deux cas possibles :

* : IMPOSSIBLE car G serait cyclique
* : IMPOSSIBLE car on obtiendrait une chaîne plus longue que la plus longue possible.

x’ est donc un sommet pendant pour chacune des chaînes ainsi construites. Nous avons donc au moins D sommets pendants.

Exercice 3

Théorème I : Les conditions suivantes pour un graphe G sont équivalentes

1. G est un arbre
2. G est connexe et on a
3. G est acyclique et on a
4. G est connexe et toute arête est un isthme
5. Dans G, deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne élémentaire unique

On va utiliser la démarche suivante :

(1)⬄(2)

(1)⬄(3)

(1)⬄(4)

(1)⬄(5)

1. (1)⬄(2)
* (1) => (2)

Par définition un arbre G est un graphe connexe.

De plus, d’après le théorème 2 du cours (preuve par récurrence) m = n-1.

* (2) => (1)

G est connexe avec. Supposons que G n’est pas un arbre, c.à.d. que G est cyclique.

Si G est cyclique, alors on peut supprimer des arêtes tout en conservant le fait que G est connexe, c.à.d. les arêtes qui sont situées dans des cycles (contraire d’un isthme). On obtient alors un nouveau graphe G’ connexe et cyclique avec sommets et arêtes. On a donc. On n’a donc pas supprimé d’arête, donc G était acyclique et donc G était un arbre.

1. (1)⬄(3)
* (1) => (3)

Par définition un arbre G est un graphe acyclique.

De plus, d’après le théorème 2 du cours (preuve par récurrence) m = n-1.

* (3) => (1)

G est acyclique avec. Supposons que G n’est pas un arbre, c.à.d. que G est non connexe.

Si G est non connexe, alors il possède au moins deux composantes connexes acycliques.

1. (1)⬄(4)
* (1) => (4)

Par définition un arbre G est un graphe connexe et acyclique.

Le fait que l’arbre soit acyclique implique que toute arête soit un isthme !

* (4) => (1)

Toutes les arêtes de G sont des isthmes donc le graphe G n’a pas de cycles. De plus il est connexe, c’est donc un arbre.

1. (1)⬄(5)
* (1) => (5)

Par définition un arbre G est un graphe connexe et acyclique.

Connexe => il existe un chemin entre deux pts quelconques.

Acyclique => ce chemin est unique.

* (5) => (1)

Il existe un chemin entre deux pts quelconques. Donc tous les sommets sont reliés : G est connexe.

La chaîne reliant une paire de sommets est unique, donc le graphe est acyclique.

Exercice 4

Soit e une arête de G. e appartient à tout arbre couvrant de G ssi e est un isthme dans G.

* On suppose que e appartient à tout arbre couvrant

Supposons que e ne soit pas un isthme. Or pour construire un arbre couvrant à partir d’un graphe, nous avons procédé comme suit :

Pour toute arête a

si a n’est pas un isthme

supprimer a.

Donc e n’appartient pas à tous les arbres couvrants. CONTRADICTION

E est donc nécessairement un arbre.

* On suppose que e est un isthme

Supposons qu’il existe un arbre couvrant Abr tel que e n’appartienne pas à Abr.

 T=Abr+{e} est cyclique

 Or e est un isthme dans G donc dans T => T est cyclique

 Donc Abr est un arbre cyclique ??? CONTRADICTION

 Remarque : on peut aussi démontrer que l’arbre est non connexe (e=}) ou que n’est pas un isthme.