Théorie des graphes : TD n°1

Exercice n°1

On considère 5 personnes. Est-il possible que chacune d’entre elle sert la main à 3 autres personnes exactement ?

*On définit donc un graph G = { S , A }, avec S = { sommets } et A = { arêtes }.*

*Dans le cadre d’un graphe non orienté, une arête est une paire de sommets.*

*On note m le nombre de sommets et n le nombre d’arêtes.*

*On appelle degré d’un sommet le nombre d’arêtes qui ont pour extrémité le sommet considéré.*

On va donc construire un graphe représentant notre situation :

* Les sommets représentent les personnes
* Les arêtes représentent les actions réciproques ‘serrer la main’
* On se demande s’il on peut avoir pour chaque sommet s deg(s) =3.

Le graphe étant non orienté, la somme des degrés est égale à deux fois le nombre des arêtes (une arête augmente le degré de deux sommets). On a donc que la somme des degrés est ***PAIR***.

Or si chaque individu sert la main à 3 personnes => deg(s) = 3 pour les cinq sommets => qui est ***IMPAIR***.

Il y a donc une contradiction.

Plus généralement, un graphe G ne peut pas avoir :

Exercice 2

1. S’il existe tel que est impair, alors il existe tel que est impair et les deux sommets et sont reliés.

*Un chemin est une suite d’arêtes/sommets reliant à .*

*Un graphe est connexe ssi tous les sommets sont reliés deux à deux.*

*On appelle composante connexe d’un graphe les sous-ensembles connexes d’un graphe.*

On considère la composante connexe qui contient le sommet qui a un degré impair. Soit le nombre d’arêtes de . La composante connexe peut aussi être vu comme un graphe connexe.

* qui est un nombre pair.

Or dans cette comme il y a un terme impair (). Donc nous avons forcement un autre sommet de degré impair !!!! De plus ces deux sommets appartiennent à la même composante connexe : ils sont donc reliés par un chemin.

1. S’il existe existe exactement deux sommets impairs, alors ils appartiennent à la même composante connexe.

En effet, s’il existe exactement deux sommets de degré impair, et , ils sont forcément reliés par un chemin (d’après la question 1 et le fait qu’il n’y ait que 2 sommets qui ont un degré impair), c.-à-d. qu’ils appartiennent à la même composante connexe.

Exercice 3

1. Il ne peut pas exister et tel que et .

*Pour tout sommet , dans le cas où il n’y a pas de boucle.*

Si un sommet à un degré égal à 0 => il est isolé

Si un sommet à un degré égal à (n-1) => il est relié à tous les autres sommets

et donc en particulier à s.

* ABSURDE
1. En déduire qu’il existe deux sommets de même degré.

De la question précédent que on a :

 OU

d est une application d’un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal (n-1). Il y a donc moins au moins deux éléments et de l’ensemble de départ qui ont la même image, c-à-d ayant le même degré.

Une autre façon de considérer le problème est la suivante. On a n sommet qui peuvent prendre n valeurs (de 0 à (n-1)). S’il ont tous un degré différent, cela implique que les n sommets prennent les n valeurs différentes. Ce qui signifie que l’on est dans la situation précédente (un sommet de degré 0 et un sommet de degré (n-1) ) ce qui est impossible.

1. Application

G = { S , A }.

S : Personnes

Arêtes {} : «  ».

d(s) est le nombre d’amis d’un individu.

D’après la question précédente, il existe deux personnes qui ont le même nombre d’amis.

Exercice 4

1. Si alors G est connexe.

*Pour tout sommet , dans le cas où il n’y a pas de boucle.*

Nous avons pour tout sommet  : .

Donc .

Si G est complet alors

*Eléments de Démonstration : supposons et G non connexe. On récupère les composantes connexes. Et on applique ce que l’on vient de démontrer. Montrer que l’on arrive à une contradiction.*

*Ce maximum est atteint pour .*

*On obtient alors :*

*On a une contradiction. Donc G est nécessairement connexe.*

Exercice