Département Informatique : Première Année

Théorie des graphes T.D. N^o 1

23 janvier 2009

Généralités

Exercice 1 Cinq personnes se rencontrent tous les matins, est-ce possible que chacune d'entre elles sert la main à trois autres personnes ? !

Exercice 2 Montrer que dans un graphe G, pour tout sommet x de degré impair, il existe un sommet y<>x de degré impair tel que x et y sont reliés par une chaîne. En déduire que si G a exactement deux sommets de degrés impairs, alors ceux-ci sont reliés par une chaîne.

Exercice 3 Soit G un graphe simple ayant n sommets, où $n > 1$. Noter que le graphe étant simple le degré d'un sommet est toujours strictement inférieur à n.

1. Montrer qu'il ne peut pas y avoir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré n-1.
2. En déduire qu'il y en au moins deux sommets de même degré.
3. Affirmer que : Dans tout ensemble d'au moins deux personnes, il y en a deux qui ont le même nombre d'amis.

Exercice 4

1. Montrer que si un graphe G simple vérifie l'inégalité :

$$m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

   alors il est connexe.

2. Trouver, pour tout $n >= 2$, un graphe simple et non connexe tel que :

$$m = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Exercice 5 Montrer que si un graphe biparti G=(X,Y,E) est k-régulier alors il est équilibré, c'est à dire on |X|=|Y|.

Exercice 6 Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G dont l'ensemble de sommets est $X = \{x_1, x_2, .., x_n\}$. Montrer que le terme (i, j) de M^k où $k >= 1$ est le nombre de chaînes reliant le sommet x_i et x_j et qui est de longueur k.
Application sur l'exemple du cours calculer le terme (2,3) de M^3.

Exercice 7 Écrire des algorithmes de passage entre les trois différentes représentations de graphe.