**Théorie des graphes TD n°2**

Exercice 1

Enumération par degré max des sommets :

Dmax = 5

Dmax = 4

Dmax = 3

Dmax = 2

Exercice 2

Xi sommet de plus haut degré

Soit xi l’un des sommets de degré maximal. On considère la chaîne la plus longue qui part de xi, et qui commence par l’arrête eik.  
On note C la chaîne considérée C= (xi, eik, …, ej, xj). Démontrons que xj est un sommet pendant.  
Si xj n’est pas un sommet pendant, il existe f ≠ ej telle que f relie xj avec un sommet y. On doit distinguer 2 cas :  
- Si y appartient à C, alors on a un cycle et l’arbre n’en n’est pas un.  
- SI y n’appartient pas à C, alors (xi, eik, …, ej, xj,f,y) est une chaîne élémentaire plus longue que C, d’où contradiction.

Exercice 3

5 🡪 1  
 Il existe une chaîne entre toute paire de sommets donc G est connexe.  
Si il existe un cycle dans le graphe, alors il existe 2 chemins disjoints qui relient 2 sommets quelconques de ce cycle, donc il n’existe pas une chaîne élémentaire unique entre ces 2 sommets.  
D’où G est acyclique.

2🡪1  
 Supposons que G soit connexe sans être un arbre. Il contient donc un cycle. On retir de G toutes les arêtes non isthmes jusqu’à obtenir un graphe G’ qui est connexe ( car toutes les arêtes retirées ne sont pas des isthmes). G’ a m’ arêtes et comme c’est un arbre, m’+1 sommets. Or G a le même nombre de sommets donc le même nombre d’arêtes. Donc on n’a en fait pas retiré d’arêtes. Donc G ne contient pas de cycle donc G est un arbre.

Exercice 4

C1 e C2 C3

Isthme 🡪 arbre couvrant  
Soit e une arête isthme de G. Soit T un arbre courant qui ne contient pas e. T+e contient un cycle (prop. IX). Comme e est un isthme, ses 2 extrémités ne sont pas reliées dans T. Donc n’est pas connexe donc T n’existe pas. Donc e appartient à tous les arbres couvrants.

Arbre couvrant 🡪 Isthme  
Soit e une arête qui appartient à tous les arbres couvrants de G. On suppose que e n’est pas un isthme dans G. On peut retirer e (prop. VI). Donc le graphe « restant », T est donc un arbre qui ne contient pas e, ce qui est contraire à l’hypothèse.