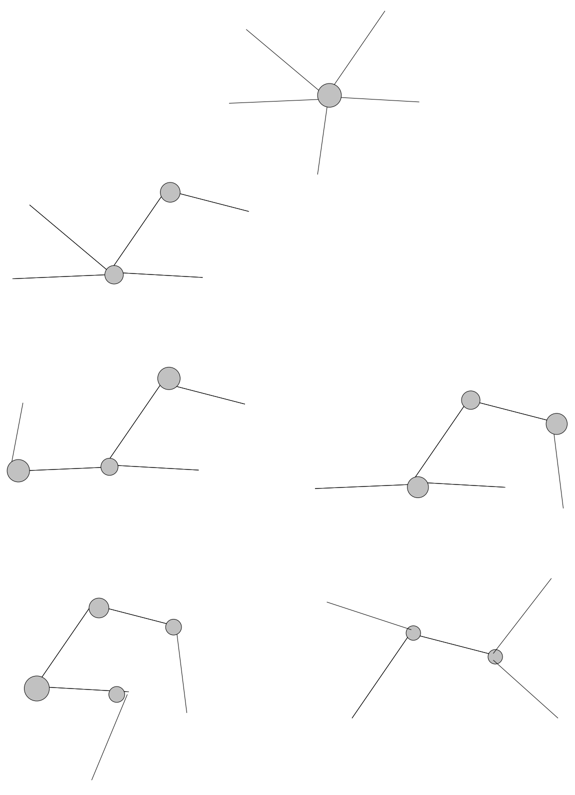
Département Informatique : Première Année

Théorie des graphes T.D. N^o 2

22 mars 2011

Les arbres

Exercice 1 Déterminer tous les arbres ayant six sommets (il y en six).



Exercice 2 Montrer qu'un arbre a au moins Δ sommets pendants (Δ étant le degré maximal).

Corrigé 2 Soit x_i le sommet ayant le degré maximum. Soit e_{ik} une arête incidente à x_i, $e_{ik} \in e_{i1}, e_{i2}, .., e_{i\Delta}$, Nous choisissons la chaîne élémentaire la plus longue dont l'extrémité est x_i et dont la première arête est e_{ik}. Soit C cette chaîne. $C = (x_i, e_{ik}, ..., e_j, x_j)$ Démontrons que x_j est pendant.

Si x_j n'est pas pendant alors il existe $f <> e_j$ tel que f relie x_j avec un sommet y. Deux cas de figures sont à discuter :

1. $y \in C$ donc l'arbre contient un cycle !!!
2. $y \notin C$ donc $(x_i, e_{ik}, ..., e_j, x_j, f, y)$ est plus longue que C !!

Donc, x_j est pendant.

Remarquer bien que deux chemins partant de x_i et traversant deux arêtes différentes e_{ik}, $e_{ik'}$ sont disjoints ; sinon on arrive à avoir un cycle dans l'arbre. Donc il existe certainement Δ sommets pendants différents.

Exercice 3 Démontrer le théorème I.

Corrigé 3

– THÉORÈME 1 Les conditions suivantes pour un graphe G sont équivalentes :
  1. G est un arbre.
  2. G est connexe et on m=n-1.
  3. G est acyclique et on n=m-1.
  4. G est connexe et toute arête est un isthme
  5. Dans G deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne élémentaire unique.

Vérifier que les implications $1 \Rightarrow 2$,$1 \Rightarrow 3$,$1 \Rightarrow 4$,$1 \Rightarrow 5$, résultent des 5 premières propositions vues en cours. $4 \Rightarrow 1$ est directe à partir du lemme numéro 1.

Il faut démontrer que $5 \Rightarrow 1$, $2 \Rightarrow 1$,et $3 \Rightarrow 1$.

$5 \Rightarrow 1$ A partir du 5 on voit que G est connexe, Il faut démontrer que G ne contient pas de cycle. S'il contient un cycle on peut voir facilement que deux sommets appartenant à ce cycle seront reliés par deux chaînes élémentaires différents donc contradiction.

$2 \Rightarrow 1$

Supposons que G n'est pas un arbre mais connexe, on lui retire des arêtes non isthme tant que c'est possible jusqu'à ce qu'on obtient G' un graphe connexe car toutes les arêtes retirés sont non isthmes et il n'a pas de cycle car toutes les arêtes restantes sont isthmes. Donc G' a m'=n-1=m arêtes (le même nombre que G) , donc G est un arbre.

3 $\Rightarrow$ 1 On suppose que G est un forêt, on calcule la somme des arêtes dans les différentes composantes connexes et on arrive à trouver qu'il existe une seule composante connexe.

Exercice 4 Montrer qu'une arête e d'un graphe connexe G appartient à tout arbre couvrant de G ssi e est un isthme de G. Montrer que e n'appartient à aucun arbre couvrant ssi e est une boucle de G.

Corrigé 4 Soit e une arête isthme de G. Soit T un arbre couvrant ne contenant pas e. T+e contient un cycle (proposition IX). Puisque e est isthme donc les deux extrémités de e ne sont pas reliées dans T. Donc T n'est pas connexe. Donc T contient e.

Soit e une arête qui appartient à tous les arbres couvrants de G. Supposons que e soit non isthme dans G donc selon la proposition VI qui décrit la construction d'un arbre couvrant à partir d'un graphe G il est possible de retirer cette arête tout dès le début de G. Le graphe résultant T serait un arbre qui ne contient pas e. Donc e n'appartient pas à tous les arbres couvrais de G.

Si e est boucle elle ne peut pas appartenir à aucun arbre couvrant car une boucle est un cycle (de longueur 1).

Soit maintenant e une arête non boucle qui n'appartient pas à aucun arbre couvrant Soit T un arbre couvrant donc selon le théorème de l'échange il existe une arête f tel que T+e-f soit un arbre couvrant voisin. donc e appartient à un arbre couvrant.

Exercice 5 Démontrer le lemme d'échange fort.

Corrigé 5 LEMME III (L'échange fort) Étant donnés deux arbres couvrants T et T' de G et une arête $e \in T' \setminus T$, il existe une arête $f \in T \setminus T'$ telle que T+e-f et T'+f-e sont des arbre couvrants de G(voir la figue du cours).

En choisissant l'arête f dans le cycle T+e, on aura T+e-f un arbre couvrant selon le lemme d'échange. (lemme II).

Mais est ce que T'+f-e est un arbre couvrant ? ? Il faut bien choisir f : Le graphe T'-e a deux composantes connexes C1,C2. Il existe donc nécessairement dans le cycle T+e une arête f dont l'extrémité sont l'une dans C1 et l'autre dans C2 et qui n'est pas dans T'. L'arête e est nécessairement une arête du cycle T'+f (car e et f sont les deux arêtes qui reliant les deux composantes C1 et C2). Donc selon le théorème de l'échange T'+f-e est un arbre couvrant. (illustrer avec la figure du cours).

Exercice 6 Un élément $T \in \tau_G$ est un minimum absolu si pour tout élément $T' \in \tau_G$ on a $v(T') >= v(T)$. T est un minimum local si pour tout élément $T' \in \tau_G$ voisin de T on a $v(T') >= v(T)$. Démontrer que dans τ_G, un minimum local est un minimum absolu.

Corrigé 6 Soit T un minimum local. Soit T_m un arbre couvrant qui soit un minimum absolu de sorte que le nombre d'arêtes de T_m qui ne soit pas dans T soit minimal. Soit une arête de $T_m \setminus T$ tel que v(e) soit minimal. Selon le lemme d'échange fort nous trouvons dans T une arête f de $T \setminus T_m$ tel que $T + e - f$ et $T_m + f - e$ soient des arbres couvrants de G. En utilisant le fait que T est minimum local (v(T)<=v(T+e-f)) on arrive à v(e)>=v(f). De même en utilisant le fait que T_m soit un minimum absolu ($v(T_m) <= v(T_m + f - e)$) on arrive à v(e)<=v(f). Donc v(e)=v(f).

Donc l'arbre $T_m + f - e$ est un autre minimum absolu ayant plus d'arête en commun avec T (l'arête f). Donc contradiction par rapport au choix de T_m différent de T ayant le minimum de nombre d'arêtes qui ne soient pas dan T. Donc T_m n'est pas different de T.

Exercice 7 A partir des résultats obtenus de l'exercice suivant, démontrer que l'algorithme de Kruskal converge vers un arbre couvrant minimum.