Département Informatique : Première Année

Théorie des graphes T.D. N^o 1

22 mars 2011

Généralités

Exercice 1 Cinq personnes se rencontrent tous les matins, est-ce possible que chacune d'entre elles serre la main à trois autres personnes ?!

Corrigé 1 La somme des degrés d'un graphe est pair et est égale à 2m (m étant le nombre d'arêtes). Or ici nous avons n=5 (5 sommets) et le degré de chaque sommet est de 3 ce qui fait une somme de 15 donc impossible.

Exercice 2 Montrer que dans un graphe G, pour tout sommet x de degré impair, il existe un sommet y<>x de degré impair tel que x et y sont reliés par une chaîne. En déduire que si G a exactement deux sommets de degrés impairs, alors ceux-ci sont reliés par une chaîne.

Corrigé 2 Soit C_x la composante connexe du graphe G à laquelle appartient x, C_x étant un graphe vérifiant la propriété : la somme de ses degrés est pair ; il existe dans C_x un autre sommet de degré impair y. Puisque C_x est connexe alors il existe une chaîne reliant x à y.

Si G a exactement deux sommets impairs, alors ces deux sommets appartiennent à la même composante connexe,etc.

Exercice 3 Soit G un graphe simple ayant n sommets, où $n > 1$. Noter que le graphe étant simple le degré d'un sommet est toujours strictement inférieur à n.

1. Montrer qu'il ne peut pas y avoir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré n-1.
2. En déduire qu'il y en au moins deux sommets de même degré.
3. Affirmer que : Dans tout ensemble d'au moins deux personnes, il y en a deux qui ont le même nombre d'amis.

Corrigé 3

1. S'il y a un sommet x de degré 0, alors ce sommet est isolé, on peut réduire à un graphe G' contenant n-1 sommets, un sommet y<>x aura donc au plus un degré de n-2 (s'il est relié avec tous les autres sommet sauf x).

   S'il y a un sommet x de degré n-1 alors il est relié avec tous les autres. Donc il n'existe pas de sommets de degré 0.
2. Dans un graphe ayant n sommets, $d(x) \in \{1, .., n-1\}$ ou (exclusif) $d(x) \in \{0, .., n-2\}$; Donc il existe n sommets , chacun ayant un degré dans un ensemble de cardinalité n-1. Donc, il existe forcément deux sommets ayant le même degré.
3. Evident ...

Exercice 4

1. Montrer que si un graphe G simple vérifie l'inégalité :

   $$m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

   alors il est connexe.
2. Trouver, pour tout $n >= 2$, un graphe simple et non connexe tel que :

   $$m = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Corrigé 4

1. Supposons que G n'est pas connexe alors G est composé de deux graphes disjoints G_1 et G_2. Nous avons (relation entre le nombre d'arêtes et de sommets dans un graphe :

   $$m_1 <= \frac{n_1(n_1-1)}{2}$$

   $m_2 <= \frac{n_2(n_2-1)}{2}$ ou $m_2 <= \frac{(n-n_1)(n-n_1-1)}{2}$, donc (à développer) :

   $$m <= \frac{2n_1(n_1-n) + n(n-1)}{2}$$

   $$m <= \frac{-2n_1(n-n_1) + n(n-1)}{2}$$

   Il faut minimiser donc le terme $n_1(n-n_1)$, n_1 prend sa valeur dans {1,..,n-1} On trouve $n_1 = 1$ qui minimise ce terme :
   $m <= \frac{-2(n-1)+n(n-1)}{2}$ donc : $m <= \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (Contradiction, donc G est connexe)
2. Il suffit de prendre $n_1 = 1$, autrement dit d'isoler un point du graphe et d'avoir une deuxième composante connexe qui sera un graphe complet. Autrement dit les n-1 point restants sont tous connectés deux à deux.

Exercice 5 Montrer que si un graphe biparti G=(X,Y,E) est k-régulier alors il est équilibré, c'est à dire on |X|=|Y|.

Corrigé 5 G est k-régulier donc le degré de chaque sommet est égal k. Puisque le graphe est biparti le nombre d'arêtes incidentes à X est égale au nombre d'arête incidentes à Y est égale à m. donc il existe $\frac{m}{k}$ sommets dans X et $\frac{m}{k}$ sommets dans Y.

Exercice 6 Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G dont l'ensemble de sommets est $X = \{x_1, x_2, .., x_n\}$. Montrer que le terme (i, j) de M^k où $k >= 1$ est le nombre de chaînes reliant le sommet x_i et x_j et qui est de longueur k.
Application sur l'exemple du cours calculer le terme (2,3) de M^3.

Corrigé 6 Par définition la valeur 1 dans la case (i,j)la matrice M^1 signifie qu'il existe une chaîne de longueur 1 qui relie x_i à x_j qui est l'arête même. Donc, supposons que la propriété est vraie pour M^k et démontrons la pour M^{k+1}.

$$M^{k+1}(i, j) = \sum_{l \in \{1,..,n\}} M^k(i, l)M(l, j)$$

Donc, s'il existe $M^k(i, l)$ une chaîne de longueur k qui relie i à l cette chaîne sera comptabilisé dans le calcul du nombre de chaîne de longueur $k + 1$ si $M(l, j) = 1$, autrement dit s'il existe une arête qui relie l à j.

Application de cours : On vérifie que $M(2) = (1, 0, 1, 0)$ et que $M(2, 3) = 1$

Exercice 7 Écrire des algorithmes de passage entre les trois différentes représentations de graphe.

Corrigé 7 Commencer à écrire les algorithmes en français. Réfléchir sur un algorithme de parcours de la liste de voisins ; attention aux tests redondants lors d'un passage à une liste d'arêtes.