Théorie de l'information. Examen 2011-2012.

Tous documents et calculatrice autorisés sauf ordinateur. Durée : 2h00.

Exercice 1. Entropie de la somme de 2 Variables Aléatoires. (2 points)

Soient les Variables Aléatoires indépendantes X_1 et X_2 qui suivent une *loi de Bernouilli* avec valeurs $X_i \in \{0, 1\}$ et de probabilités $\begin{cases} p(X_i = 1) = p \\ p(X_i = 0) = 1 - p \end{cases}$ $i = 1 \cdots 2$.

1. Calculer, en fonction de p , *l'entropie* $H(Y)$ de la Variable Aléatoire $Y = X_1 + X_2$. $\boxed{1}$

2. Dans le cas particulier $p = 0.5$, donner la *valeur numérique* de *l'entropie* $H(Y)$. $\boxed{1}$

Exercice 2. Codage optimal de Huffman. (5 points)

Une université doit communiquer par voie télématique une liste de résulats (notes A, B, C, D ou E d'une matière) concernant 1000 étudiants. Ces résultats sont les suivants :

Note	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Nombre d'étudiants	100	150	500	200	50

1. Calculer *l'entropie* de la source d'information constituée par les résultats. $\boxed{1}$

2. Construire un *arbre de Huffman* en vue de la compression sans pertes des données. $\boxed{1}$

3. En déduire un *code de Huffman* associé à chaque note. $\boxed{1}$

4. Donner la *longueur moyenne* du code de Huffman construit. $\boxed{1}$

5. Indiquer (en %) le *taux de compression* t réalisé par rapport à une transmission classique (codage ASCII fixe 8 bits par caractère A, B, C, D ou E). $\boxed{1}$

Exercice 3. Canal de transmission asymétrique bruité. (4 points)

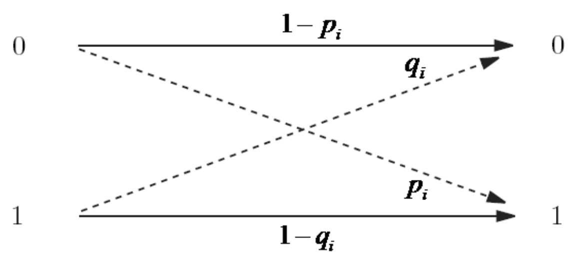
Une source d'information binaire émet les symboles 0 et 1 avec les probabilités $P(0) = p = 0.1$ et $P(1) = q = 1 - p = 0.9$. Ces bits sont transmis à un récepteur à travers un canal bruité illustré ci-dessous, avec les probabilités d'erreurs de transmission $p_i = 0.1$ pour un bit 0, et $q_i = 0.6$ pour un bit 1. En notant X et Y les symboles respectivement *émis* et *reçus*, calculer les caractéristiques suivantes, en **valeurs numériques** :

1. Les *entropies* $H(X)$ et $H(Y)$. $\boxed{1}$

2. Les *entropies* $H(X,Y)$, $H(Y|X)$. $\boxed{1}$

3. L'*information mutuelle moyenne* $I(X;Y)$ et la *probabilité*, notée p_e , d'*erreur de transmission d'un symbole*. $\boxed{1}$

4. La *capacité* C du canal en *absence de bruit*. $\boxed{1}$



Exercice 4. Code cyclique. **(5 points)**

On considère un code en bloc linéaire, de paramètres $(n,k)=(8,2)$, de matrice génératrice : $\mathbf{G}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&0\\1&1\\1&0\\1&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$

1. Ecrire la *matrice génératrice* sous forme systématique $\tilde{\mathbf{G}}$ permettant d'obtenir la *forme systématique* du code. [0.5]
2. Donner la *table de code* obtenue par construction systématique du code. [0.5]
3. En déduire la *distance minimale* d de ce code. [0.5]
4. Combien d'erreurs peut-il toujours *détecter* ? Combien d'erreurs peut-il toujours *corriger* ? [1]
5. Déterminer la *matrice de contrôle* $\mathbf{H}$ du code. [0.5]
6. Soit le message reçu $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&1&0&0\end{pmatrix}$ entaché de 2 erreurs. La correction de ce mot est-elle garantie ? [0.5]
7. Si la correction est possible, donner le *mot-source* issu du décodage de $\boldsymbol{\omega}$. [1]
8. Le code construit est un code dit *cyclique*, car lorsqu'on décale un mot-code d'1 bit vers la droite circulairement, on obtient un mot appartenant au code. Un code cyclique s'obtient à partir d'un mot du code particulier dit *mot générateur* $\mathbf{g}$ constitué de n bits $\mathbf{g}=b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0$ tel que tous les mots du code sont *multiples* de $\mathbf{g}$. On associe généralement au mot générateur, un polynôme $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$ dit *polynôme générateur* du code et tel que les polynômes associés aux mots du code sont *multiples* de $g(x)$.
Donner le *polynôme générateur* du code. [0.5]

Exercice 5. Code systématique. **(4 points)**

Soit le code linéaire $C_{n,k}=C_{7,4}$ qui au vecteur d'information (bits i_1 à i_4) $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}i_1&i_2&i_3&i_4\end{pmatrix}$ associe le mot de code (bits i_1 à i_4 et c_5 à c_7) $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}i_1&i_2&i_3&i_4&c_5&c_6&c_7\end{pmatrix}$ avec $\begin{cases}c_5=i_1+i_3+i_4\\c_6=i_1+i_2+i_3\\c_7=i_2+i_3+i_4\end{cases}$.

1. Donner la *matrice génératrice* de ce code. [1]
2. Donner la *matrice de contrôle* $\mathbf{H}$ de ce code. [1]
3. Soit $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix}$, quel est le mot de code associé ? [1]
4. Soit le message $\mathbf{m}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$. Est-ce un mot du code ? [1]

ANNEXE. Table de logarithme de base 2

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.01	-6.6438	0.0664
0.02	-5.6438	0.1128
0.03	-5.0588	0.1517
0.04	-4.6438	0.1857
0.05	-4.3219	0.2160
0.06	-4.0588	0.2435
0.07	-3.8365	0.2685
0.08	-3.6438	0.2915
0.09	-3.4739	0.3126
0.10	-3.3219	0.3321
0.11	-3.1844	0.3502
0.12	-3.0588	0.3670
0.13	-2.9434	0.3826
0.14	-2.8365	0.3971
0.15	-2.7369	0.4105
0.16	-2.6438	0.4230
0.17	-2.5563	0.4345
0.18	-2.4739	0.4453
0.19	-2.3959	0.4552
0.20	-2.3219	0.4643
0.21	-2.2515	0.4728
0.22	-2.1844	0.4805
0.23	-2.1202	0.4876
0.24	-2.0588	0.494134
0.25	-2.00	.50
0.26	-1.9434	0.5052
0.27	-1.8889	0.5100
0.28	-1.8365	0.5142
0.29	-1.7858	0.5179
0.30	-1.7369	0.5210
0.31	-1.6896	0.5237
0.32	-1.6438	0.5260
0.33	-1.5994	0.5278

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.34	-1.5563	0.5291
0.35	-1.5145	0.5301
0.36	-1.4739	0.5306
0.37	-1.4344	0.5307
0.38	-1.3959	0.5304
0.39	-1.3584	0.5297
0.40	-1.3219	0.5287
0.41	-1.2863	0.5273
0.42	-1.2515	0.5256
0.43	-1.2175	0.5235
0.44	-1.1844	0.5211
0.45	-1.1520	0.5184
0.46	-1.1202	0.5153
0.47	-1.0892	0.5119
0.48	-1.0588	0.5082
0.49	-1.0291	0.5042
0.50	-1.00	0.50
0.51	-0.9714	0.4954
0.52	-0.9434	0.4905
0.53	-0.9159	0.4854
0.54	-0.8889	0.4800
0.55	-0.8624	0.4743
0.56	-0.8365	0.4684
0.57	-0.8109	0.4622
0.58	-0.7858	0.4558
0.59	-0.7612	0.4491
0.60	-0.7369	0.4421
0.61	-0.7131	0.4350
0.62	-0.6896	0.4275
0.63	-0.6665	0.4199
0.64	-0.6438	0.4120
0.65	-0.6214	0.4039
0.66	-0.5994	0.3956

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.67	-0.5777	0.3871
0.68	-0.5563	0.3783
0.69	-0.5353	0.3693
0.70	-0.5145	0.3602
0.71	-0.4941	0.3508
0.72	-0.4739	0.3412
0.73	-0.4540	0.3314
0.74	-0.4344	0.3214
0.75	-0.4150	0.3112
0.76	-0.3959	0.3009
0.77	-0.3770	0.2903
0.78	-0.3584	0.2795
0.79	-0.3400	0.2686
0.80	-0.3219	0.2575
0.81	-0.3040	0.2462
0.82	-0.2863	0.2347
0.83	-0.2688	0.2231
0.84	-0.2515	0.2112
0.85	-0.2344	0.1992
0.86	-0.2175	0.1871
0.87	-0.2009	0.1747
0.88	-0.1844	0.1622
0.89	-0.1681	0.1496
0.90	-0.1520	0.1368
0.91	-0.1360	0.1238
0.92	-0.1202	0.1106
0.93	-0.1046	0.0973
0.94	-0.0892	0.0839
0.95	-0.0740	0.0703
0.96	-0.0588	0.0565
0.97	-0.0439	0.0426
0.98	-0.0291	0.0285
0.99	-0.0145	0.0143

Théorie de l'information. Examen 2011-2012 Corrigé.

Exercice 1. Entropie de la somme de 2 Variables Aléatoires.

1.
$$Y=\begin{cases}0 & \text{avec} \quad p(Y=0)=p(X_1=0 \text{ et } X_2=0)=p(X_1=0)\cdot p(X_2=0)=(1-p)^2\\ 1 & \text{avec} \quad p(Y=1)=p(X_1=0 \text{ et } X_2=1)+p(X_1=1 \text{ et } X_2=0)=p(X_1=0)\cdot p(X_2=1)+p(X_1=1)\cdot p(X_2=0)=2p(1-p)\\ 2 & \text{avec} \quad p(Y=2)=p(X_1=1 \text{ et } X_2=1)=p(X_1=1)\cdot p(X_2=1)=p^2\end{cases}$$

$$\rightarrow \; H(Y)=-(1-p)^2\log_2(1-p)^2-2p(1-p)\log_2[2p(1-p)]-p^2\log_2 p^2$$

$$\rightarrow \; \boxed{H(Y)=-2p(1-p)-2p\log_2 p-2(1-p)\log_2(1-p)} \quad \text{car } \log_2(2)=1$$

2. $\boxed{H(Y)=1.5 \text{ bits/symbole}}$

Exercice 2. Codage optimal de Huffman.

Table des fréquences des notes :

Note	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Nombre d'étudiants	100	150	500	200	50
Fréquence	**0.1**	**0.15**	**0.5**	**0.2**	**0.05**

1. *Entropie :*

$$\boxed{H=-0.1\log_2(0.1)-0.15\log_2(0.15)-0.5\log_2(0.5)-0.2\log_2(0.2)-0.05\log_2(0.05)\approx 1.92 \text{ bits/symbole}}$$

2. *Arbre de Huffman* :

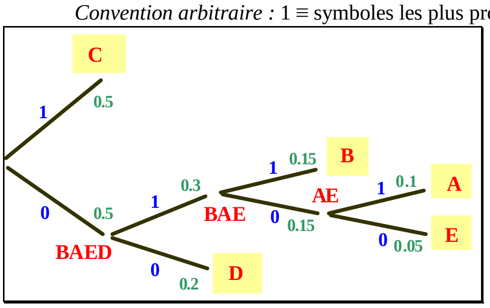
s_i	**C**	**D**	**B**	**A**	**E**
p_i	**0.5**	**0.2**	**0.15**	**0.1**	**0.05**

s_i	**C**	**D**	**B**	**AE**
p_i	**0.5**	**0.2**	**0.15**	**0.15**

s_i	**C**	**BAE**	**D**
p_i	**0.5**	**0.3**	**0.2**

s_i	**C**	**BAED**
p_i	**0.5**	**0.5**

Convention arbitraire : 1 ≡ symboles les plus probables, 0 ≡ symboles les moins probables



3. *Code de Huffman* associé :

s_i	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
p_i	0.1	0.15	0.5	0.2	0.05
m_i	**0101**	**011**	**1**	**00**	**0100**
l_i	4	3	1	2	4

4. *Longueur moyenne du code de Huffman :*

$$\boxed{\overline{L}=\sum_{i=1}^{5}p_i l_i=4\cdot 0.1+3\cdot 0.15+1\cdot 0.5+2\cdot 0.2+4\cdot 0.05=1.95 \text{ bits/symbole}}$$

5. $\boxed{t=\dfrac{8-1.95}{8}=75.6\%}$

Exercice 3. Canal de transmission asymétrique bruité.

L'énoncé définit les matrices de distributions de probabilités *conditionnelle* $P(Y|X)$ et *marginale* $P_X = P(X)$:

$P(Y|X) =$

$X \setminus Y$	0	1	P_X
0	$1-p_i = 0.9$	$p_i = 0.1$	$p = 0.1$
1	$q_i = 0.6$	$1-q_i = 0.4$	$q = 1-p = 0.9$

Le calcul de $H(X,Y)$ requiert la détermination préalable de la distribution *conjointe* $P(X,Y)$:

$$p(x_i, y_j) = p(y_j \mid x_i)p(x_i) \qquad i = 1,\ldots,n = 2 \quad j = 1,\ldots,m = 2 .$$

$P(X,Y)$ permet aussi le calcul de la distribution *marginale* $P_Y = P(Y)$:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n=2} p(x_i, y_j) \text{ impliquée dans le calcul de } H(Y).$$

$P(X,Y) =$

$X \setminus Y$	0	1	P_X
0	$(1-p_i)p = 0.09$	$p_i p = 0.01$	$p = 0.1$
1	$q_i(1-p) = 0.54$	$(1-q_i)(1-p) = 0.36$	$q = 1-p = 0.9$
P_Y	$(1-p_i)p + q_i(1-p) = 0.63$	$p_i p + (1-q_i)(1-p) = 0.37$	

1. $\boxed{H(X) = -\sum_{i=1}^{n=2} p(x_i)\log_2[p(x_i)] = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p) \approx 0.469 \text{ bit/symbole}}$.

$$\boxed{H(Y) = -\sum_{j=1}^{m=2} p(y_j)\log_2[p(y_j)] = -[(1-p_i)p + q_i(1-p)]\log_2[(1-p_i)p + q_i(1-p)] - [p_i p + (1-q_i)(1-p)]\log_2[p_i p + (1-q_i)(1-p)] \approx 0.951 \text{ bit/symbole}}$$

2.

$$\boxed{H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n=2}\sum_{j=1}^{m=2} p(x_i, y_j)\log_2[p(x_i, y_j)] = -(1-p_i)p\log_2[(1-p_i)p] - p_i p\log_2(p_i p) - q_i(1-p)\log_2[q_i(1-p)] - (1-q_i)(1-p)\log_2[(1-q_i)(1-p)] \approx 1.39 \text{ bits/symbole}}$$

$$\boxed{H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n=2}\sum_{j=1}^{m=2} p(x_i, y_j)\log_2[p(y_j|x_i)] = -(1-p_i)p\log_2(1-p_i) - p_i p\log_2(p_i) - q_i(1-p)\log_2(q_i) - (1-q_i)(1-p)\log_2(1-q_i) \approx 0.921 \text{ bit/symbole}}$$

3. $\boxed{I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = 0.03 \text{ bit/symbole}}$.

- *probabilité* p_e d'*erreur de transmission d'un symbole* :

la *probabilité* d'*erreur de transmission d'un symbole* s'obtient à partir de la matrice de probabilités *conjointe* $P(X,Y)$ qui met en jeu à la fois la matrice de *transition* $P(Y|X)$ et la distribution *marginale* P_X :

$$\boxed{p_e = P(X = 0 \text{ et } Y = 1) + P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = p[(X,Y) = (0,1)] + p[(X,Y) = (1,0)] = p_i p + q_i(1-p) = 0.55}$$

4. Pour un canal sans bruit: $H(X|Y) = 0 \rightarrow \boxed{C = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{p\in[0,1]} I(X;Y) = \max_{p\in[0,1]} H(X) = H(X)\big|_{p=0.5} = 1 \text{ bit/symbole}}$

Exercice 4. Code cyclique.

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Echelonnage de $\mathbf{G}$: $\begin{cases} c_1 \leftarrow c_1 + c_2 \\ c_2 \leftarrow c_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \hline \mathbf{G}' \end{pmatrix}}$ avec $\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. *Image du code*

#	*mot source* $\mathbf{m}_i^{\mathrm{T}}$	*mot-code* $\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}} = (\mathbf{G}\mathbf{m}_i)^{\mathrm{T}} = (\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{m}_i)^{\mathrm{T}} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \hline \mathbf{G}' \end{pmatrix}\mathbf{m}_i\right]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_i \\ \hline \mathbf{G}'\mathbf{m}_i \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{m}_i^{\mathrm{T}} \middle| (\mathbf{G}'\mathbf{m}_i)^{\mathrm{T}}\right]$	*distance, poids* $d_h(\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{0}) = w(\boldsymbol{\omega}_i)$ (*= nombre de bits 1 de* $\boldsymbol{\omega}_i$)
1	00	**00 000000**	0
2	01	**01 010101**	4
3	10	**10 101010**	4
4	11	**11 111111**	8

$\rightarrow d = 4$

3. $\boxed{d = 4}$

4. Capacité de **détection** d'erreurs : $\boxed{e_d = d - 1 = 3}$ Capacité de **correction** d'erreurs : $\boxed{e_c = E\left[\frac{d-1}{2}\right] = 1}$

5. $\mathbf{H} = \left(\mathbf{G}' \middle| \mathbf{I}_{n-k}\right) \rightarrow \boxed{\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

6. La correction de $\boldsymbol{\omega} = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$ entaché de 2 erreurs **n'est pas garantie** car la *capacité de correction* est d'1 erreur, mais elle est **possible par décodage au sens de minimum de distance de Hamming**.

7. *Mot-source* issu du décodage de $\boldsymbol{\omega}$ par décodage *au sens de minimum de distance de Hamming* :

$$\begin{cases} d_H(\boldsymbol{\omega},00\,000000)=4 \\ d_H(\boldsymbol{\omega},01\,010101)=6 \\ d_H(\boldsymbol{\omega},10\,101010)=2 \\ d_H(\boldsymbol{\omega},11\,111111)=4 \end{cases} \rightarrow \text{mot-code corrigé : } \boldsymbol{\omega}'=(1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0)^{\mathrm{T}} \rightarrow \text{mot-source : } \boxed{(1\quad 0)^{\mathrm{T}}}.$$

8.

$\omega_1 = 00\,000000$: polynôme correspondant : $\omega_1(x)=0$

$\omega_2 = 01\,010101$: polynôme correspondant : $\omega_2(x)=x^6+x^4+x^2+1$

$\omega_3 = 10\,101010$: polynôme correspondant : $\omega_3(x)=x^7+x^5+x^3+x$

$\omega_4 = 11\,111111$: polynôme correspondant : $\omega_4(x)=x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$\rightarrow$ **polynôme générateur :** $\boxed{g(x)=\omega_2(x)=x^6+x^4+x^2+1}$

$$\begin{cases} \omega_1(x)=0\cdot g(x) \\ \omega_2(x)=1\cdot g(x) \\ \omega_3(x)=x\cdot g(x) \\ \omega_4(x)=(x+1)\cdot g(x) \end{cases}$$

(le polynôme générateur est de degré $n-k$)

$\rightarrow$ mot générateur : $\mathbf{g}=01\,010101$

$$\begin{cases} \omega_1=0\cdot\mathbf{g} \\ \omega_2=1\cdot\mathbf{g} \\ \omega_3=10\cdot\mathbf{g} \\ \omega_4=11\cdot\mathbf{g} \end{cases}$$

ω_3																ω_2
	1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	
	1	0	1	0	1	0	1		**1**	**0**						
	0	0	0	0	0	0	0	0								

ω_4																ω_2
	1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	
	1	0	1	0	1	0	1		**1**	**1**						
	0	1	0	1	0	1	0	1								
		1	0	1	0	1	0	1								
		0	0	0	0	0	0	0								

Exercice 5. Code systématique.

1. Le code est donné sous forme systématique car les mots-codes ont les mots-sources pour préfixes. La matrice génératrice apparaît donc directement sous forme systématique :

$$\boxed{\mathbf{G}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}=\left(\frac{\mathbf{I}_k}{\mathbf{G}'}\right)} \quad \text{avec } \mathbf{G}'=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{H}=\left(\mathbf{G}'\middle|\mathbf{I}_{n-k}\right)\rightarrow \boxed{\mathbf{H}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}}$

3. $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow \boxed{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=\left(\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\middle|(\mathbf{G}'\mathbf{i})^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}}$ car $\mathbf{G}'\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

4. ■ *méthode du syndrome :* $\mathbf{S}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{m}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}\rightarrow\boxed{\mathbf{m}\text{ non mot - code}}$

■ *méthode directe :* $\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\overset{?}{=}\left(\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\middle|(\mathbf{G}'\mathbf{i})^{\mathrm{T}}\right)$; $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow \mathbf{G}'\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\boxed{\mathbf{m}\text{ non mot - code}}$