EISTI **Année scolaire 2008-2009**

DÉPARTEMENT "INFORMATIQUE"

THÉORIE DE L'INFORMATION

Examen 2011. *Durée 2h00.*

Document autorisé : *polycopié du cours imprimé uniquement. Les* **calculatrices** *sont admises.*

Exercice 1. Soit une source X d'alphabet $\Omega_X = \{a, b, c, d, e, f\}$

1. Quelle est l'entropie maximale pour une telle source ?
2. Quel est le nombre minimal de bits par caractère nécessaire pour un codage binaire à longueur fixe de cette source ?
3. On dispose pour cette source de trois codes binaires :

	x	a	b	c	d	e	f
C_1 :	m(x)	01	110	111	010	101	11
C_2 :	m(x)	01	101	1110	1100	0011	0010
C_3 :	m(x)	01	10	11	0001	0011	0000

   (a) lesquels de ces codes sont sans préfixe ?

   (b) Pour chacun des codes sans préfixe donner sa représentation sous forme d'arbre binaire

4. Supposons que la distribution des probabilités est la suivante :

x	a	b	c	d	e	f
p(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

   (a) Calculer l'entropie associée à cette distribution de probabilités

   (b) Quelle est la borne inférieure pour la longueur moyenne des mots de code pour un binaire pour cette source ? Justifier la réponse.

(c) Parmi les trois codes définis ci-dessus (question précédente) lequel est le meilleur pour cette distribution de probabilités ?

(d) Justifier l'existence d'un code binaire absolument optimal pour cette source et préciser les longueurs des mots d'un tel code pour chaque caractère.

(e) Trouver un code binaire sans préfixe absolument optimal en utilisant l'élagage d'un arbre binaire.

5. Supposons que la distribution des probabilités est la suivante :

x	a	b	c	d	e	f
p(x)	0.05	0.1	0.15	0.2	0.1	0.4

(a) Calculer l'entropie associée à cette distribution de probabilités

(b) Parmi les trois codes définis ci-dessus (question précédente) lequel est le meilleur pour cette distribution de probabilités ?

(c) Calculer le code optimal pour cette distribution de probabilité en utilisant l'algorithme de Huffman.

(d) Le code de Huffman obtenu est-il absolument optimal ?

Exercice 2. Soit une source X d'alphabet $\Omega_X = \{a, b, c, d\}$ et un récepteur Y de même alphabet que X. On considère un canal de matrice de transition

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & (1-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

1. Est ce que c'est un canal symétrique ?
2. Supposons que la distribution de probabilités de la source est quelconque :

x	a	b	c	d
p(x)	p_1	p_2	p_3	p_4

Calculer les matrices de probabilités P_Y, $P(X,Y)$ en fonction des paramètres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$.

3. Montrer que l'entropie $H(Y|X)$ de dépend pas de la distribution de probabilités de la source (des paramètres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$).

4. Montrer que si la distribution de X est uniforme alors la distribution de Y est aussi uniforme ;
5. Pour quelle distribution de probabilité de X la valeur de $H(Y)$ est elle maximale ? Donner

$$\max_{(p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4)\in[0,1]^4} H(Y)$$

6. En déduire la capacité de ce canal. **Indication :** utiliser $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$ ici.

Exercice 3. Codage Linéaire.

Soit G un code linéaire de matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner les paramètres (n, k) du code
2. Calculer la forme systématique de la matrice génératrice du code.
3. Donner tous les mots du code
4. Calculer la distance minimale du code, d
5. En déduire les capacités de correction et de détection
6. L'émetteur souhaite envoyer deux blocs :

$$b_1 = 111, \quad b_2 = 010$$

   Quels mots de code doit il envoyer ?

   Supposons que après l'envoi des mots de code correspondants aux blocs b_1 et b_2 le récepteur reçoit les mots suivants

$$m_1 = 000000, \quad m_2 = 000100$$

   Pour chacun des mots dire si

   (a) l'erreur sera détectée

   (b) l'erreur sera corrigée par le décodage au sens de minimum de distance de Hamming.

   Justifier vos réponses, **sans appliquer l'algorithme de correction.**

ANNEXE. Table de logarithme de base 2

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.01	-6.6438	0.0664
0.02	-5.6438	0.1128
0.03	-5.0588	0.1517
0.04	-4.6438	0.1857
0.05	-4.3219	0.2160
0.06	-4.0588	0.2435
0.07	-3.8365	0.2685
0.08	-3.6438	0.2915
0.09	-3.4739	0.3126
0.10	-3.3219	0.3321
0.11	-3.1844	0.3502
0.12	-3.0588	0.3670
0.13	-2.9434	0.3826
0.14	-2.8365	0.3971
0.15	-2.7369	0.4105
0.16	-2.6438	0.4230
0.17	-2.5563	0.4345
0.18	-2.4739	0.4453
0.19	-2.3959	0.4552
0.20	-2.3219	0.4643
0.21	-2.2515	0.4728
0.22	-2.1844	0.4805
0.23	-2.1202	0.4876
0.24	-2.0588	0.494134
0.25	-2.00	.50
0.26	-1.9434	0.5052
0.27	-1.8889	0.5100
0.28	-1.8365	0.5142
0.29	-1.7858	0.5179
0.30	-1.7369	0.5210
0.31	-1.6896	0.5237
0.32	-1.6438	0.5260
0.33	-1.5994	0.5278

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.34	-1.5563	0.5291
0.35	-1.5145	0.5301
0.36	-1.4739	0.5306
0.37	-1.4344	0.5307
0.38	-1.3959	0.5304
0.39	-1.3584	0.5297
0.40	-1.3219	0.5287
0.41	-1.2863	0.5273
0.42	-1.2515	0.5256
0.43	-1.2175	0.5235
0.44	-1.1844	0.5211
0.45	-1.1520	0.5184
0.46	-1.1202	0.5153
0.47	-1.0892	0.5119
0.48	-1.0588	0.5082
0.49	-1.0291	0.5042
0.50	-1.00	0.50
0.51	-0.9714	0.4954
0.52	-0.9434	0.4905
0.53	-0.9159	0.4854
0.54	-0.8889	0.4800
0.55	-0.8624	0.4743
0.56	-0.8365	0.4684
0.57	-0.8109	0.4622
0.58	-0.7858	0.4558
0.59	-0.7612	0.4491
0.60	-0.7369	0.4421
0.61	-0.7131	0.4350
0.62	-0.6896	0.4275
0.63	-0.6665	0.4199
0.64	-0.6438	0.4120
0.65	-0.6214	0.4039
0.66	-0.5994	0.3956

p	$\log_2(p)$	$plog_2(1/p)$
0.67	-0.5777	0.3871
0.68	-0.5563	0.3783
0.69	-0.5353	0.3693
0.70	-0.5145	0.3602
0.71	-0.4941	0.3508
0.72	-0.4739	0.3412
0.73	-0.4540	0.3314
0.74	-0.4344	0.3214
0.75	-0.4150	0.3112
0.76	-0.3959	0.3009
0.77	-0.3770	0.2903
0.78	-0.3584	0.2795
0.79	-0.3400	0.2686
0.80	-0.3219	0.2575
0.81	-0.3040	0.2462
0.82	-0.2863	0.2347
0.83	-0.2688	0.2231
0.84	-0.2515	0.2112
0.85	-0.2344	0.1992
0.86	-0.2175	0.1871
0.87	-0.2009	0.1747
0.88	-0.1844	0.1622
0.89	-0.1681	0.1496
0.90	-0.1520	0.1368
0.91	-0.1360	0.1238
0.92	-0.1202	0.1106
0.93	-0.1046	0.0973
0.94	-0.0892	0.0839
0.95	-0.0740	0.0703
0.96	-0.0588	0.0565
0.97	-0.0439	0.0426
0.98	-0.0291	0.0285
0.99	-0.0145	0.0143