Ex 1

X, $\Omega_X = \{a, b, c, d, e, f\}$

1) $n = \text{Card}(\Omega_X) = 6 \Rightarrow H_{max} = \log_2(6)$

2) Pour un code binaire de longueur fixe l on a :

$$\overline{L} = l$$

Or, l'entropie représente la borne inf de long. moyenne des mots ;

$\forall$ code $\quad \overline{L} \geq H$

Sans précision sur la distrib. de proba on considère $H_{max} = \log_2 6 \simeq 2{,}58$

$\Rightarrow \quad l > 2{,}58$

Le plus petit nb. entier sera $l = 3$.

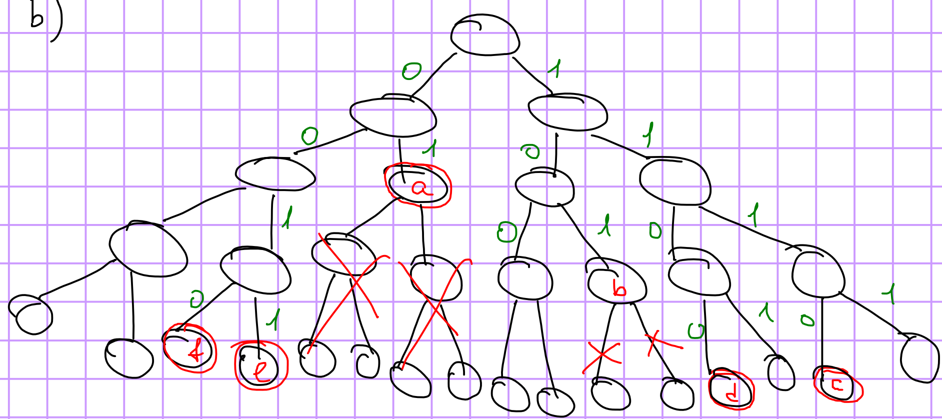
Il faut au moins 3 bits par caractère

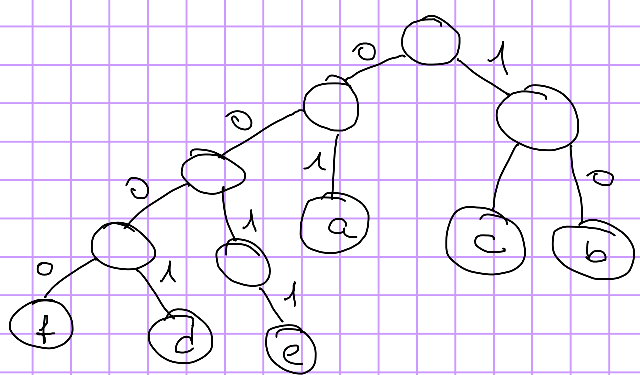
(On peut aussi raisonner en indiquant qu'avec 2 bits on code 4 caractères et avec 3 bits on a 8 mots différents)

3.

a) les codes C_2 et C_3 sont sans préfixe

b)





4) a) $H = 2{,}5$

b) l'entropie

c) calcul des longueurs moyennes

C_2 : $\bar{L}_{C_2} = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \times 4 \times \frac{1}{8} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 2 = 3{,}25$

C_3 : $\bar{L}_{C_3} = 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} =$

$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{7}{4} = 2{,}75$

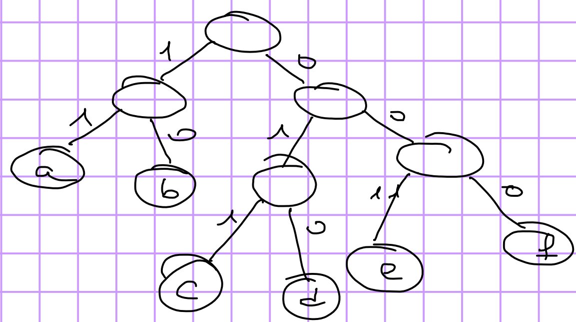
Le code C_3 est meilleur

d) Ici les probabilités sont des puissances de $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ le code abs. optim. existe et sera

x_i	a	b	c	d	e	f
l_i	2	2	3	3	3	3

e) On construit un arbre de prof. 3



5)

a	b	c	d	e	f
0.05	0.1	0.15	0.2	0.1	0.4

a) $H \approx 2{,}28$

b) Calcul de $\bar{L}$

$\bar{L}_{C_1} = 2 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.1 + 4\,(0.15 + 0.2 + 0.1 + 0.4)$

$= 0.1 + 0.3 + 4 \times 0.85 = 3.8$

$\bar{L}_{C_2} = 3.4$

C_2 le meilleur

c) Huffman

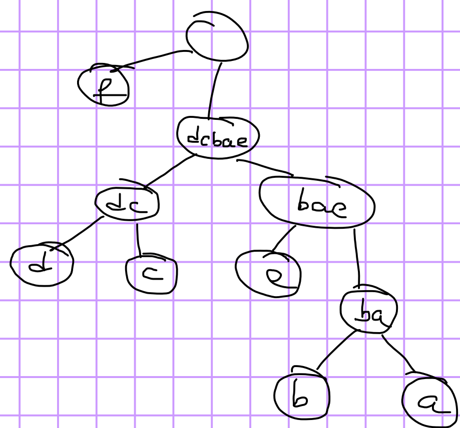
f	d	c	e	b	a
0.4	0.2	0.15	0.1	0.1	0.05

f	d	c	ba	e
0.4	0.2	0.15	0.15	0.1

f	bae	d	c
0.4	0.25	0.2	0.15

f	dc	bae
0.4	0.35	0.25

dcbae	f
0.6	0.4



d) Le code abs. optimal n'existe pas ici.

Exc 2

1) Canal symétrique

2)

$p_1(1-\alpha)$	$p_1\alpha$	0	0	p_1	$1-\alpha$	α	0	0
$p_2\alpha$	$p_2(1-\alpha)$	0	0	p_2	α	$1-\alpha$	0	0
0	0	$p_3(1-\alpha)$	$p_3\alpha$	p_3	0	0	$1-\alpha$	α
0	0	$p_4\alpha$	$p_4(1-\alpha)$	p_4	0	0	α	$1-\alpha$

$$P_Y = \{(p_1(1-\alpha)+p_2\alpha), (p_1\alpha+p_2(1-\alpha)), (p_3(1-\alpha)+p_4\alpha), (p_3\alpha+p_4(1-\alpha))\}$$

3) $$H(Y|X) = -\sum_{ij} p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j|x_i) =$$

$$= p_1(1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + p_1\alpha\log_2\alpha +$$
$$+ p_2(1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + p_2\alpha\log_2\alpha \ + (\text{analogue})$$
$$+ p_3 H_2(\alpha, 1-\alpha) + p_4 H_2(\alpha, 1-\alpha) =$$
$$= (p_1+p_2+p_3+p_4) H_2(\alpha, 1-\alpha) = H_2(\alpha, 1-\alpha)$$

car $p_1+p_2+p_3+p_4 = 1$

4) Soit $P_X = \{\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\}$

$$\Rightarrow P_Y = \left\{\frac{1}{4}(\alpha+1-\alpha),\ \frac{1}{4}(\alpha+1-\alpha),\ \frac{1}{4}(\alpha+1-\alpha),\ \frac{1}{4}(\alpha+1-\alpha)\right\}$$
$$= \left\{\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right\}$$

5) $H(Y)$ est maximal si $P_Y = \{\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\}$

et $H_{max}(Y) = 2$

6)
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) =$$
$$= H(Y) - H_2(\alpha, 1-\alpha)$$
$$\Rightarrow \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} H_Y - H_2(\alpha, 1-\alpha) =$$
$$= 2 - H_2(\alpha, 1-\alpha)$$

car H_Y est maxi si Y uniforme

et Y uniforme quand X est uniforme

Ex 3

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $n = 6 \quad k = 3$

2) $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

$$G \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $w = G m = \begin{pmatrix} m \\ G' m \end{pmatrix}$ $\qquad G' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

m	w	ω
000	000 000	0
100	100 101	3
010	010 110	3
001	001 111	4
110	110 011	4
101	101 010	3
011	011 001	3
111	111 100	4

4) $d = \min_{w \neq 0} \omega(w) = 3$

5) $e_d = d - 1 = 2$

$e_c = \left[\frac{d-1}{2}\right] = 1$

6

$b_1 = 111 \Rightarrow w_1 = 111\ 100 \qquad m_1 = 000\ 000$

$b_2 = 010 \Rightarrow w_2 = 010\ 110 \qquad m_2 = 000100$

b_1:

a) non, car le mot reçu, $m_1 = 000\,000$ est un mot du code. Il sera décodé comme 000

b) correction impossible

b_2: a) le mot reçu 000100 n'est pas un mot du code. L'erreur sera détectée

b) On constate que le mot du code le plus proche de m_2 est 000000 : $d(m_2, 000000) = \underline{1}$

alors que $d(w_2, m_2) = 2$

Le mot m_2 sera donc décodé comme 000 et non comme b_2.

L'erreur n'est pas corrigée.

__Barème.__

<u>Ex 1</u> : 7 pts	<u>Ex 2</u> 7.0	Ex 3 6.0
1) : 0.5	1) : 0.5	1) 0.5
2) : 0.5	2) : 1.0	2) 1.0
3) : 1.0	3) 1.5	3) 1.0
4) : 2.5	4) 1.5.	4) 1.0
5) : 2.5.	5) 1.0.	5) 0.5
	6) 1.5	6) 2.0