

EXAMEN LOGIQUE COMPUTATIONNELLE – PROLOG

Exercice 1 TABLE DE VÉRITÉ

1. Compléter la table de vérité suivante :

a	b	c	$(\neg a \wedge \neg b) \vee c$	$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)$	$(a \vee b \rightarrow c) \leftrightarrow (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

2. Préciser si, dans la table précédente, il y a une tautologie. Justifier votre réponse.

SOL.- $(a \vee b \rightarrow c) \leftrightarrow (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$ est une tautologie car elle se vérifie toujours.

3. Préciser s'il y a une formule insatisfiable. Justifier votre réponse.

SOL.- Il n'y a pas de formule insatisfiable, car il n'y a pas de formule qui soit toujours fausse.

4. Donner un modèle pour $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)$. Justifier votre réponse.

SOL.- $a = b = c = 0$ est un modèle car la valeur de vérité de la formule est 1.

5. Donner toutes les formules équivalentes à $a \vee b \rightarrow c$.

SOL.- Les formules $\neg a \wedge \neg b \vee c$, $(a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$ sont équivalentes à $a \vee b \rightarrow c$.

Exercice 2 CALCUL DES PRÉDICATS

Soient les prédicats suivants:

- $e(X)$: X est un étudiant
- $r(X)$: X sait raisonner

et les énoncés:

(a) $\forall X(e(X) \wedge r(X))$

(b) $\forall X(e(X) \rightarrow r(X))$

(c) $\exists X(e(X) \wedge r(X))$

(d) $\exists X(e(X) \rightarrow r(X))$

1. Trouver un modèle qui satisfait (a) et (b).
2. Trouver un modèle qui satisfait (b) et pas (a)
3. Trouver un modèle qui satisfait (c) et (d).
4. Trouver un modèle qui satisfait (d) et pas (c).
5. Est il possible de trouver un modèle satisfaisant (a) et pas (b) ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 FORME CONJONCTIVE NORMALE

Soit la fbf

$$\exists X p(X) \wedge \forall Y \neg q(X, Y) \rightarrow \exists Z (p(Z) \wedge q(Z, W))$$

Calculer la forme conjonctive normale équivalente à cette formule.

SOL.- La formule donnée s'écrit successivement

$$\begin{aligned} \neg(\exists X p(X) \wedge \forall Y q(X, Y)) \vee (\exists Z (p(Z) \wedge q(Z, W))) &= \\ (\forall X \neg p(X) \vee \exists Y q(X, Y)) \vee (\exists Z (p(Z) \wedge q(Z, W))) &= \\ (\forall X \neg p(X) \vee q(X, s_Y(X))) \vee (p(s_Z) \wedge q(s_Z, W)) &= \\ (\neg p(X) \vee q(X, s_Y(X))) \vee (p(s_Z) \wedge q(s_Z, W)) &= \\ (\neg p(X) \vee q(X, s_Y(X)) \vee p(s_Z)) \wedge (\neg p(X) \vee q(X, s_Y(X)) \vee q(s_Z, W)) &= \end{aligned}$$

Exercice 4 MODÈLES DE HERBRAND

Considérons un univers du discours qui est composé

- (a) de deux constantes a et b , et

(b) d'un prédicat p d'arité 1.

1. En utilisant le prédicat et les constantes, construire une fbf, qui n'est pas forcément un programme défini, et qui permet d'avoir plusieurs modèles de Herbrand mais pas de modèle minimal en dehors du modèle \emptyset .

SOL.- On pose la formule $p(a) \vee p(b)$. On a univers de Herbrand $\mathcal{U} = \{a, b\}$, base de Herbrand $\mathcal{B} = \{p(a), p(b)\}$. Les modèles sont tous les sous-ensembles de \mathcal{B} , à savoir $\mathcal{I}_1 = \{p(a)\}$, $\mathcal{I}_2 = \{p(b)\}$ et $\mathcal{I}_3 = \{p(a), p(b)\}$. On a $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 = \emptyset$, c-à-d. il n'y a pas de modèle minimal.

2. Pourriez-vous donner une explication pour l'absence de modèle minimal de Herbrand ?

SOL.- Il n'y a pas de modèle minimal, car la formule $p(a) \vee p(b)$ ne constitue pas un programme défini.

Exercice 5 ÉGALITÉ ET NÉGATION

1. Donner et expliquer la réponse de Prolog à la question ? $- 2 + 2 = 4$..
2. Donner et expliquer la réponse de Prolog à la question ? $- X = 4, not(member(X, [1, 2, 3]))$..
3. Donner et expliquer la réponse de Prolog à la question ? $not(member(X, [1, 2, 3]), X = 4$..

Exercice 6 ENSEMBLES

Écrire un prédicat `sous_ensemble(L1, L2)` qui est vrai si L2 est un sous-ensemble de la liste L1. (On supposera que la liste L1 ne contient pas de doublon.)

Exercice 7 LISTES

Écrire un prédicat `conservePairs(L1, L2)` qui est vrai si L2 est constituée des éléments de d'indice pair de L1. (On supposera que la numérotation des listes commencent à l'indice 1.)

Exercice 8 NOMBRES PREMIERS

On rappelle qu'un nombre naturel strictement positif est premier s'il n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui-même.

1. Écrire un prédicat `liste_diviseurs(N, L)` qui est vrai si L est constituée de tous les diviseurs de N.
2. Écrire un prédicat `est_premier(N)` qui est vrai si N est un naturel premier.

Exercice 9 TRIPLETS PYTHAGORICIENS

On appelle triplet pythagoricien un triplet (a, b, c) tel que $a^2 + b^2 = c^2$. Un tel triplet est dit primitif s'il est composé de nombres premiers entre eux.

1. Écrire un prédicat `triplet_pythagoricien(A, B, C)` qui est vrai si A, B et C forment un triplet pythagoricien.

2. Écrire un prédicat *triplet_pythagoricien_primitif(A, B, C)* qui est vrai si *A*, *B* et *C* forment un triplet pythagoricien primitif.

Exercice 10 DAMES SUR UN ÉCHIQUIER

On rappelle qu'aux échecs, une dame peut se déplacer horizontalement, verticalement et en diagonale.

Après avoir justifié clairement la structure de données utilisée et la librairie de contraintes choisie, écrire un prédicat *huitDames(L)* qui est vrai si *L* représente un échiquier de 8 cases sur 8 sur lequel sont posées 8 dames dont aucune ne peut se déplacer sur la case d'une autre.

Exercice 11 BASES DE DONNÉES

En analyse numérique, nous avons étudié la méthode (simplifiée) de Google pour établir une réponse à une requête d'un utilisateur. Selon cette méthode Google dispose des bases de données qui contiennent des mots-clés selon différents domaines et des bases de données contenant des documents qui sont indexés par des mots-clés. Pour répondre à une requête il croise les mots-clés de la requête avec les ses bases de données.

Nous utiliserons la méthode de Google pour répondre à des requêtes en Prolog. Par exemple nous avons les bases de données suivantes dont nous présentons les champs :

```
art(musique, peinture, sculpture, chant).
musique(compositeur, Nom, Oeuvre).
musique(chanteur, Nom, Oeuvre).
. . . . .
peinture(NomPeintre, Oeuvre).
. . . . .
livres(essai, roman, biographie, poesie, scientifique, technique).
essai(Auteur, Titre, Editeur, Annee).
. . . . .
```

Nous donnons ci-après quelques enregistrements qui correspondent aux bases de données ci-dessus :

```
musique(compositeur, ravel, 'Ma mere l Oye').
musique(compositeur, bartok, 'Le mandarin merveilleux').
musique(compositeur, boulez, 'Dialogue de l ombre double').
. . . . .
peinture(klee, 'Le pays fertile').
peinture(braque, 'Eureka').
. . . . .
essai(boulez, 'Le pays fertile', gallimard, 1989).
essai(boulez, 'Penser la musique aujourd'hui', gallimard, 1987).
essai(klee, 'Théorie de l art moderne', gallimard, 1988)
. . . . .
```

Écrire en Prolog, un programme qui permet de répondre à la question “*titre de l'œuvre d'un peintre qui est aussi le titre d'un livre écrit par un compositeur. De plus afficher le nom du peintre et du compositeur.*”.

N.B. Il n'est pas obligatoire, mais vous pouvez éventuellement utiliser des bases de données supplémentaires que vous créez. Vous pouvez aussi utiliser des programmes auxiliaires ou des opérateurs comme for/2, afficheEltList/2, ... , sans écrire leur code.

SOL.- Ci-après la plus simple de solutions.

```
:- op(1100, fx, afficheListe).
:- op(1100, fx, afficheTout).

afficheListe [X,Y] :- nl,
                    for(Y, (write(X), nl)),fail.
afficheListe [X,Y].

afficheTout X :- afficheListe [X, X].

for(X,Y) :- X, Y.
for(X,Y).

musique(compositeur, ravel, 'Ma mere l Oye').
musique(compositeur, bartok, 'Le mandarin merveilleux').
musique(compositeur, boulez, 'Dialogue de l ombre double').

peinture(klee, 'Le pays fertile').
peinture(braque, 'Eureka').

essai(boulez, 'Le pays fertile', gallimard, 1989).
essai(boulez, 'Penser la musique aujourd'hui', gallimard, 1987).
essai(klee, 'Theorie de l art moderne', gallimard, 1988).

% Question
q2 :- afficheListe [Titre, (essai(Auteur, Titre,_,_),
                          peinture(Peintre, Titre),
                          musique(compositeur, Auteur,_))].

% On peut aussi utiliser les bases de donnees virtuelles en les creant d'abord.

?- q2.

Le pays fertile, klee, boulez
true.
```