LOGIQUE COMPUTATIONNELLE

COURS 1

CALCUL DES PRÉDICATS I

Ch. Baskiotis

LAPI – EISTI

28 septembre 2009

CALCUL DES PROPOSITIONS

Principale faiblesse

CALCUL DES PROPOSITIONS

Principale faiblesse

Absence des variables

CALCUL DES PROPOSITIONS

Principale faiblesse

Absence des variables

$\Rightarrow$ Calcul des prédicats $\equiv$
calcul des propositions $\bigcup$ variables

Éléments du langage I

– Constantes : $\mathbf{\Xi} = \{a, b, \ldots\}$

Éléments du langage I

- Constantes : $\mathbf{\Xi} = \{a, b, \ldots\}$
- Variables : $\mathbf{V} = \{X, Y, \ldots\}$

Éléments du langage I

- Constantes : $\mathbf{\Xi} = \{a, b, \ldots\}$
- Variables : $\mathbf{V} = \{X, Y, \ldots\}$
- Foncteurs : $\mathbf{F} = \{f, g, \ldots\}$

  avec $f : \mathbf{V} \times \mathbf{\Xi} \rightarrow \mathbf{\Xi}$

  Exemple de foncteur : $\sin(0.5x) \in \mathbf{\Xi}$

Éléments du langage II

– Prédicats : $\mathbf{P} = \{p, q, \ldots\}$

avec $p : \mathbf{V} \times \mathbf{\Xi} \longrightarrow \{vrai,\ faux\}$

Éléments du langage II

- Prédicats : $\mathbf{P} = \{p, q, \ldots\}$

  avec $p : \mathbf{V} \times \mathbf{\Xi} \longrightarrow \{vrai,\ faux\}$

  Exemple de prédicat :

  $$couleur(petitLivre, rouge) = vrai$$

- Connecteurs : $\{\neg, \vee, \wedge, \longrightarrow, \leftrightarrow\}$

Éléments du langage II

- Prédicats : $\mathbf{P} = \{p, q, \ldots\}$

  avec $p : \mathbf{V} \times \mathbf{\Xi} \rightarrow \{vrai,\ faux\}$

  Exemple de prédicat :

  $$couleur(petitLivre, rouge) = vrai$$

- Connecteurs : $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- Quantificateurs : $\{\forall, \exists\}$

Éléments du langage II

- Prédicats : $\mathbf{P} = \{p, q, \ldots\}$
  avec $p : \mathbf{V} \times \mathbf{\Xi} \rightarrow \{vrai,\ faux\}$
  Exemple de prédicat :
  $$couleur(petitLivre, rouge) = vrai$$
- Connecteurs : $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- Quantificateurs : $\{\forall, \exists\}$
- Connecteurs et Quantificateurs : L

Éléments du langage II

- Prédicats : $\mathbf{P} = \{p, q, \ldots\}$
  avec $p : \mathbf{V} \times \mathbf{\Xi} \rightarrow \{vrai,\ faux\}$
  Exemple de prédicat :
  $$couleur(petitLivre, rouge) = vrai$$
- Connecteurs : $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- Quantificateurs : $\{\forall, \exists\}$
- Connecteurs et Quantificateurs : L
- (Séparateurs : (,), [,]) Éléments extra-logiques

Vade-mecum I

Les foncteurs et les prédicats sont des fonctions au sens classique du terme.

Vade-mecum I

Les foncteurs et les prédicats sont des fonctions au sens classique du terme.

Pourquoi alors deux noms différents ?

Vade-mecum I

Les foncteurs et les prédicats sont des fonctions au sens classique du terme.

Pourquoi alors deux noms différents ?

Parce que l'ensemble d'arrivée est différent :

Vade-mecum I

Les foncteurs et les prédicats sont des fonctions au sens classique du terme.

Pourquoi alors deux noms différents ?

Parce que l'ensemble d'arrivée est différent :

– Un foncteur exprime une relation entre ses arguments $\Rightarrow$ Image du foncteur : un ensemble quelconque qui contient les valeurs du foncteur pour ses arguments.

Vade-mecum I

Les foncteurs et les prédicats sont des fonctions au sens classique du terme.

Pourquoi alors deux noms différents ?

Parce que l'ensemble d'arrivée est différent :

– Un foncteur exprime une relation entre ses arguments $\Rightarrow$ Image du foncteur : un ensemble quelconque qui contient les valeurs du foncteur pour ses arguments.
– Un prédicat exprime la valeur de vérité concernant une propriété de ses arguments $\Rightarrow$ Image du prédicat : les valeurs de vérité *vrai* ou *faux*.

Alphabet

Alphabet

$$\Sigma_1 = \{\mathbf{V}, \mathbf{\Xi}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, L\}$$

Termes

Un ***terme*** est

– une constante ;

Termes

Un ***terme*** est

– une constante ;

– une variable ;

Termes

Un ***terme*** est

- une constante ;
- une variable ;
- un foncteur $f(t_1, \ldots t_n)$ dont les arguments t_i sont des termes.

Termes

Un *terme* est

- une constante ;
- une variable ;
- un foncteur $f(t_1, \ldots t_n)$ dont les arguments t_i sont des termes.

Notation : $\mathbb{T}$

Formules Bien Formées (fbf)

$\mathbb{F}$ ensemble des fbf par rapport à Σ_1 :

Formules Bien Formées (fbf)

$\mathbb{F}$ ensemble des fbf par rapport à Σ_1 :

C'est le plus petit ensemble qu'on peut former tel que

– $p(t_1, \ldots t_n) \in \mathbb{F}$ où p prédicat et t_i termes.

Formules Bien Formées (fbf)

$\mathbb{F}$ ensemble des fbf par rapport à Σ_1 :

C'est le plus petit ensemble qu'on peut former tel que

- $p(t_1, \ldots t_n) \in \mathbb{F}$ où p prédicat et t_i termes.
- Si $F, G \in \mathbb{F}$, alors :
  - $\neg F \in \mathbb{F}$

Formules Bien Formées (fbf)

$\mathbb{F}$ ensemble des fbf par rapport à Σ_1 :

C'est le plus petit ensemble qu'on peut former tel que

- $p(t_1, \ldots t_n) \in \mathbb{F}$ où p prédicat et t_i termes.
- Si $F, G \in \mathbb{F}$, alors :
  - $\neg F \in \mathbb{F}$
  - $F \bigvee G \in \mathbb{F}$, $F \bigwedge G \in \mathbb{F}$

Formules Bien Formées (fbf)

$\mathbb{F}$ ensemble des fbf par rapport à Σ_1 :

C'est le plus petit ensemble qu'on peut former tel que

- $p(t_1, \ldots t_n) \in \mathbb{F}$ où p prédicat et t_i termes.
- Si $F, G \in \mathbb{F}$, alors :
  - $\neg F \in \mathbb{F}$
  - $F \bigvee G \in \mathbb{F}$, $F \bigwedge G \in \mathbb{F}$
  - $F \longrightarrow G \in \mathbb{F}$, $F \leftrightarrow G \in \mathbb{F}$

Formules Bien Formées (fbf)

$\mathbb{F}$ ensemble des fbf par rapport à Σ_1 :

C'est le plus petit ensemble qu'on peut former tel que

– $p(t_1, \ldots t_n) \in \mathbb{F}$ où p prédicat et t_i termes.

– Si $F, G \in \mathbb{F}$, alors :

  – $\neg F \in \mathbb{F}$

  – $F \bigvee G \in \mathbb{F}$, $F \bigwedge G \in \mathbb{F}$

  – $F \longrightarrow G \in \mathbb{F}$, $F \leftrightarrow G \in \mathbb{F}$

– Si $F \in \mathbb{F}$ et $X \in V$, $(\forall X) \in \mathbb{F}$, $(\exists X) \in \mathbb{F}$.

Vade-mecum II

Les foncteurs sont des termes dont les arguments sont des termes

Vade-mecum II

Les foncteurs sont des termes dont les arguments sont des termes

$\Longrightarrow$ Les arguments d'un foncteur peuvent être des foncteurs

Vade-mecum II

Les foncteurs sont des termes dont les arguments sont des termes

$\Longrightarrow$ Les arguments d'un foncteur peuvent être des foncteurs

$\Longrightarrow$ Les arguments d'un foncteur ne peuvent pas être des prédicats

Vade-mecum II

Les foncteurs sont des termes dont les arguments sont des termes

$\Rightarrow$ Les arguments d'un foncteur peuvent être des foncteurs

$\Rightarrow$ Les arguments d'un foncteur ne peuvent pas être des prédicats

Conséquence :

On ne peut pas avoir des fonctions définies sur des propriétés.

Vade-mecum III

Les prédicats sont des fbf dont les arguments sont des termes

Vade-mecum III

Les prédicats sont des fbf dont les arguments sont des termes

$\Longrightarrow$ Les arguments d'un prédicat peuvent être des foncteurs

Vade-mecum III

Les prédicats sont des fbf dont les arguments sont des termes

$\Longrightarrow$ Les arguments d'un prédicat peuvent être des foncteurs

$\Longrightarrow$ Les arguments d'un prédicat ne peuvent pas être des prédicats

Vade-mecum III

Les prédicats sont des fbf dont les arguments sont des termes

$\Rightarrow$ Les arguments d'un prédicat peuvent être des foncteurs

$\Rightarrow$ Les arguments d'un prédicat ne peuvent pas être des prédicats

Conséquence :

On ne peut pas avoir des propriétés des propriétés

Langage du premier ordre (LPO – FOL)

Le triplet

$$\mathcal{L} = \{\Sigma_1, \mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

est le langage du premier ordre ou le langage du calcul des prédicats.

Langage du premier ordre (LPO – FOL)

Le triplet

$$\mathcal{L} = \{\Sigma_1, \mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

est le langage du premier ordre ou le langage du calcul des prédicats.

N.B. Si on accepte que les prédicats puissent avoir comme arguments d'autres arguments, alors on obtiendrait des logiques d'ordre supérieur à 1.

Interprétation sémantique

Interprétation sémantique

C'EST QUOI ? Donner un sens aux fbf

Interprétation sémantique

C'EST QUOI ? Donner un sens aux fbf

$\Rightarrow$ connaître leur valeur de vérité.

Interprétation sémantique

C'EST QUOI ? Donner un sens aux fbf

$\Rightarrow$ connaître leur valeur de vérité.

COMMENT ? Dans un univers du discours $\mathcal{U}$

Interprétation sémantique

C'EST QUOI ? Donner un sens aux fbf

$\Rightarrow$ connaître leur valeur de vérité.

COMMENT ? Dans un univers du discours $\mathcal{U}$

– Les atomes ont une signification et une valeur de vérité données.

Interprétation sémantique

C'EST QUOI ? Donner un sens aux fbf

$\Rightarrow$ connaître leur valeur de vérité.

COMMENT ? Dans un univers du discours $\mathcal{U}$

– Les atomes ont une signification et une valeur de vérité données.

– Les fbf non atomiques ont une signification issue de la signification des atomes.

Interprétation sémantique

C'EST QUOI ? Donner un sens aux fbf

$\Rightarrow$ connaître leur valeur de vérité.

COMMENT ? Dans un univers du discours $\mathcal{U}$

– Les atomes ont une signification et une valeur de vérité données.
– Les fbf non atomiques ont une signification issue de la signification des atomes.
– Même chose pour les valeurs de vérité $\Rightarrow$ Table de vérité.

La logique est une . . .

Pensée profonde (totologie) de Toto au vu de la planche précédente :

La logique est une vieille mémé qui radote !

La logique est une . . .

Pensée profonde (totologie) de Toto au vu de la planche précédente :

La logique est une vieille mémé qui radote !

Que néni, car l'apparente similitude des textes cache bien la différence du contenu.

La logique est une . . .

Pensée profonde (totologie) de Toto au vu de la planche précédente :

La logique est une vieille mémé qui radote !

Que néni, car l'apparente similitude des textes cache bien la différence du contenu.

On sait que le prédicat `nombrePair(6)` a comme valeur de vérité "vrai".

La logique est une . . .

Pensée profonde (totologie) de Toto au vu de la planche précédente :

La logique est une vieille mémé qui radote !

Que néni, car l'apparente similitude des textes cache bien la différence du contenu.

On sait que le prédicat *nombrePair(6)* a comme valeur de vérité "vrai".
Essayer, maintenant, de calculer la valeur de vérité du prédicat *pair(X)*, où X est une variable.

Interprétation

Interprétatation : Une correspondance I entre le langage du 1er ordre $\mathcal{L}$ et un univers du discours $\mathcal{U}$

$\mathcal{L} = \{\Sigma_1, \mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ est un triplet, chaque élément du triplet est aussi composé des plusieurs éléments.

Interprétation

Interprétataion : Une correspondance I entre le langage du 1er ordre $\mathcal{L}$ et un univers du discours $\mathcal{U}$

$\mathcal{L} = \{\Sigma_1, \mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ est un triplet, chaque élément du triplet est aussi composé des plusieurs éléments.

$\Rightarrow$ La correspondance I n'est pas une simple application

Interprétation

Interprétataion : Une correspondance I entre le langage du 1er ordre $\mathcal{L}$ et un univers du discours $\mathcal{U}$

$\mathcal{L} = \{\Sigma_1, \mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ est un triplet, chaque élément du triplet est aussi composé des plusieurs éléments.

$\Rightarrow$ La correspondance I n'est pas une simple application

$\Rightarrow$ Elle est un ensemble d'applications, spécifiques aux types d'éléments de $\mathcal{L}$.

Présentation de l'interprétation

1. À chaque constante de $\mathcal{L}$ correspond une constante a_I de $\mathcal{U}$

Présentation de l'interprétation

1. À chaque constante de $\mathcal{L}$ correspond une constante a_I de $\mathcal{U}$
2. À chaque foncteur $f(t_1, \ldots t_n)$ de $\mathcal{L}$ correspond une fonction $f_I((t_1)_I, \ldots, (t_n)_I))$ de $\mathcal{U}$ avec $(t_k)_I$ l'interprétation du terme t_k par I.

Présentation de l'interprétation

1. À chaque constante de $\mathcal{L}$ correspond une constante a_I de $\mathcal{U}$
2. À chaque foncteur $f(t_1, \ldots t_n)$ de $\mathcal{L}$ correspond une fonction $f_I((t_1)_I, \ldots, (t_n)_I))$ de $\mathcal{U}$ avec $(t_k)_I$ l'interprétation du terme t_k par I.
3. À chaque prédicat $p(t_1, \ldots t_n)$ de $\mathcal{L}$ correspond une application $p_I((t_1)_I, \ldots, (t_n)_I))$ de $\mathcal{U}^n$ dans $\{vrai, faux\}$.

Le problème des variables

Conséquence : La valeur de l'interprétation d'un prédicat ou d'un foncteur dépend de la valeur des termes $(t_k)_I$ qui sont des interprétations des termes t_k.

Le problème des variables

Conséquence : La valeur de l'interprétation d'un prédicat ou d'un foncteur dépend de la valeur des termes $(t_k)_I$ qui sont des interprétations des termes t_k.

Big Question : **Comment trouver l'interprétation de $(t_k)_I$ et calculer la valeur de $(t_k)_I$ si le terme t_k contient des variables ?**

$\Rightarrow$ **Comment interprète-t-on une variable ?**

Comprendre où se situe le problème

$$\left.\begin{array}{l}\text{Interpréter}\\ \text{une variable } X\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Connaître l'objet}\\ \text{que désigne } X\end{array}\right.$$

Comprendre où se situe le problème

$$\left.\begin{array}{l}\text{Interpéter}\\ \text{une variable } X\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Connaître l'objet}\\ \text{que désigne } X\end{array}\right.$$

$\Rightarrow X$ n'est plus une variable

Solution : Déplacer le problème

Les variables du langage $\mathcal{L}$ sont interprétées comme des éléments variables de l'univers du discours $\mathcal{U}$!

Solution : Déplacer le problème

Les variables du langage $\mathcal{L}$ sont interprétées comme des éléments variables de l'univers du discours $\mathcal{U}$!

Il s'agit d'une application mathématique du grand principe du génie logiciel :

Solution : Déplacer le problème

Les variables du langage $\mathcal{L}$ sont interprétées comme des éléments variables de l'univers du discours $\mathcal{U}$!

Il s'agit d'une application mathématique du grand principe du génie logiciel :

Ne fais pas aujourd'hui

Solution : Déplacer le problème

Les variables du langage $\mathcal{L}$ sont interprétées comme des éléments variables de l'univers du discours $\mathcal{U}$!

Il s'agit d'une application mathématique du grand principe du génie logiciel :

Ne fais pas aujourd'hui
ce que tu peux faire demain

Solution : Déplacer le problème

Les variables du langage $\mathcal{L}$ sont interprétées comme des éléments variables de l'univers du discours $\mathcal{U}$!

Il s'agit d'une application mathématique du grand principe du génie logiciel :

Ne fais pas aujourd'hui
ce que tu peux faire demain
dans un autre contexte

Formalisation

Étant donné l'ensemble des variables $\mathbf{V}$ du langage $\mathcal{L}$ on construit de manière abstraite une application

$$\overline{\phi}_I : \mathbf{V} \to \mathcal{U}$$

qui s'appelle *assignation des variables par rapport à l'interprétation* I.

Formalisation

Étant donné l'ensemble des variables $\mathbf{V}$ du langage $\mathcal{L}$ on construit de manière abstraite une application

$$\overline{\phi}_I : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{U}$$

qui s'appelle *assignation des variables par rapport à l'interprétation* I.

Ainsi pour une variable $X \in \mathbf{V}$ on associe par assignation l'élément variable $\overline{\phi}_I(X)$ de l'univers du discours $\mathcal{U}$.

Sémantique des termes

Soient $\mathbb{T}$ termes, I interprétation et $t \in \mathbb{T}$ un terme.

Sémantique des termes

Soient $\mathbb{T}$ termes, I interprétation et $t \in \mathbb{T}$ un terme.

Signification ϕ_I de t

– $t =$ constante $\Rightarrow \phi_I(t) = t_I$.

Sémantique des termes

Soient $\mathbb{T}$ termes, I interprétation et $t \in \mathbb{T}$ un terme.

Signification ϕ_I de t

– $t =$ constante $\Rightarrow \phi_I(t) = t_I$.

– $t =$ variable $\Rightarrow \phi_I(t) = \overline{\phi}_I(t_I)$.

Sémantique des termes

Soient $\mathbb{T}$ termes, I interprétation et $t \in \mathbb{T}$ un terme.

Signification ϕ_I de t

– $t =$ constante $\Rightarrow \phi_I(t) = t_I$.

– $t =$ variable $\Rightarrow \phi_I(t) = \overline{\phi}_I(t_I)$.

– $t = f(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow \phi_I(t) = f_I\left(\phi_I(t_1), \ldots, \phi_I(t_n)\right)$.

Sémantique des fbf I

Soient $F, G, H \in F$ et I interprétation.

Sémantique des fbf I

Soient $F, G, H \in \mathcal{F}$ et I interprétation.

Valeur de vérité $I(F)$ *de* F *relativement à* I

– Si $F = f(t_1, \ldots, t_n)$, $I(F)$ égale à la valeur de vérité de $p_I\left(\phi_I(t_1), \ldots, \phi_I(t_n)\right)$.

Sémantique des fbf I

Soient $F, G, H \in F$ et I interprétation.

Valeur de vérité $I(F)$ *de* F *relativement à* I

– Si $F = f(t_1, \ldots, t_n)$, $I(F)$ égale à la valeur de vérité de $p_I\,(\phi_I(t_1), \ldots, \phi_I(t_n))$.

– Si $F = \neg G, G \vee H, G \wedge H, G \rightarrow H, G \leftrightarrow H$, $I(F)$ égale à la valeur de vérité de la forme correspondante.

Sémantique des fbf II

– Si $F = \forall X G(X)$, alors $I(F) = 1$ ssi $\forall \overline{\phi}_I(X)$: $I(G\left(\overline{\phi}_I(X)\right) = 1$.

Sémantique des fbf II

– Si $F = \forall X G(X)$, alors $I(F) = 1$ ssi $\forall \overline{\phi}_I(X)$: $I(G\left(\overline{\phi}_I(X)\right) = 1$.

– Si $F = \exists X G(X)$, alors $I(F) = 1$ ssi $\exists \overline{\phi}_I(X)$: $I(G\left(\overline{\phi}_I(X)\right) = 1$.

Pluie des définitions

DÉF 1.- Une fbf F est *satisfiable* ou *sémantiquement consistante* s'il existe une interprétation I tq $I(F) = 1$ par rapport à I.

Dans ce cas, l'interprétation I est un *modèle* pour F.

Notation : $I \models F$

Pluie des définitions

DÉF 1.- Une fbf F est *satisfiable* ou *sémantiquement consistante* s'il existe une interprétation I tq $I(F) = 1$ par rapport à I.
Dans ce cas, l'interprétation I est un *modèle* pour F.
Notation : $I \models F$

DÉF 2.- Une fbf qui ne possède pas de modèle est appelée *insatisfiable* ou *sémantiquement inconsistante*.

Déf 3.- Une fbf F qui est vraie pour toute interprétation est appelée *formule valide*.

Notation : $\models F$.

DÉF 3.- Une fbf F qui est vraie pour toute interprétation est appelée *formule valide*.
Notation : $\models F$.

DÉF 4.- Deux fbf sont *logiquement équivalentes* ssi elles ont la même valeur de vérité pour toute interprétation.

DÉF 3.- Une fbf F qui est vraie pour toute interprétation est appelée *formule valide*.
Notation : $\models F$.

DÉF 4.- Deux fbf sont *logiquement équivalentes* ssi elles ont la même valeur de vérité pour toute interprétation.

DÉF 4.- Une fbf F est une *conséquence sémantique* de $G = \{G_1, \ldots, G_n\}$ si pour toute interprétation I tq $I(G_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$ on a $I(F) = 1$.

Et un théorème pour la route...

THÉORÈME (de l'insatisfiabilité).- Soient F un ensemble des fbf closes et G une fbf close.
On a $F \models G$ ssi $F \bigcup \{\neg G\}$ est insatisfiable.