2013

HENRIO Jordan
MONTOLIU Teddy
DUHAMEL Corentin
AIGREAULT Clément
BELLUOT Vincent

[GENIE LOGICIEL 2]

Il s’agit de développer un logiciel de mathématiques qui traite des espaces vectoriels, applications linéaires et des polynômes formels.

Table des matières

Introduction

Dans ce livrable, nous allons approfondir nos recherches, pousser plus loin nos définitions afin d'entamer plus fortement le travail qui nous est demandé.
Nous allons développer nos définitions mathématiques, de manière plus complexe, pour permettre une meilleure compréhension dans la suite de notre travail et mettre en place un début d'UML.

Nous comptons également mettre en place une séparation des tâches mieux répartie pour la suite du projet.

1) Etude des Espaces Vectoriels

Dans notre premier livrable, nous avions défini qu'un espace vectoriel est un ensemble muni d'une structure (c'est-à-dire muni de plusieurs règles mathématiques) permettant d'effectuer des combinaisons linéaires (certaines opérations caractéristiques des espaces vectoriel).

Un espace vectoriel est défini principalement selon le corps dans lequel nous nous trouvons, sa dimension et une base. On peut d'ores et déjà remarquer qu'il existe deux types d'espaces vectoriels : les espaces vectoriels de dimension finie ou infinie.

Mais tout d'abord, essayons de bien comprendre ce qu'est un espace vectoriel.

On définit un vecteur comme étant une correspondance entre un élément d'un ensemble et son image dans ce même ensemble. Ainsi, c'est un déplacement dans un espace multidimensionnel. De plus, on peut dire qu'un vecteur est un élément d'un espace vectoriel. Donc, on peut conclure qu'un espace vectoriel est un ensemble d'un ou de plusieurs vecteurs.

Cet espace est considéré comme étant un groupe, mathématiquement parlant. La notion de groupe en mathématique signifie que c'est un ensemble muni de plusieurs propriétés :

- Il est muni d'une loi de composition interne associative, c'est-à-dire que si l'on prend plusieurs éléments d'un ensemble, on peut faire une opération entre ces éléments. De plus, la notion d'associativité nous dit que quelque soit les groupes que l'on fait entre ces éléments, on obtiendra toujours le même résultat (Prenons trois éléments x, y, z. On aura la relation suivante : $(x*y)*z = x*(y*z)$).
- Il est muni d'un élément neutre, c'est-à-dire qu'un élément annule l'opération que l'on fait. Il existe maximum un élément neutre dans chaque groupe mathématique.
- Il est muni, pour chaque élément de l'ensemble, d'un élément symétrique, c'est-à-dire que pour un élément donné, son opposé existe.

Maintenant, parlons des différents ensembles qui existent en mathématiques. Nous savons que N représente l'ensemble des entiers (1, 2, 3 sont des nombres entiers par exemple). Dans la partie des espaces vectoriels, nous allons nous concentrer uniquement des ensembles des réels, noté R (un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales, donc de chiffres après la virgule) et des ensembles des complexes, noté C (un nombre complexe est l'extension d'un nombre réel, c'est-à-dire qu'il contient aussi le nombre imaginaire i).

Désormais, nous savons ce qu'est un espace vectoriel. Nous allons voir les notions que nous avons besoins pour mener à bien la conception de notre programme.

Un espace vectoriel de dimension finie est un espace possédant une famille génératrice finie. Une famille génératrice est une famille de vecteurs dont les combinaisons linéaires permettent de construire tous les autres vecteurs de l'espace. Ainsi, un espace vectoriel de dimension infinie est un espace possédant une famille génératrice infinie, donc un nombre de vecteurs infinie.

On différencie chaque espace suivant le corps dans lequel on se trouve, sa dimension et sa base. Une base est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel telle que chaque vecteur de l'espace puisse être exprimé de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de cette base. Une combinaison linaire est un mode opératoire permettant de faire un lien entre un sous-ensemble d'un espace vectoriel et des éléments d'un vecteur quelconque.

2) Etude des applications linéaires

Dans notre précédent rapport de Génie Logiciel 2, nous avons défini qu'une application linéaire est une application entre deux espaces vectoriels qui préserve des combinaisons linéaires. Ainsi, elle respecte l'addition et la multiplication des vecteurs dans ces espaces.

Les applications linéaires dont nous avons besoin dans notre projet sont toutes liées aux espaces vectoriels.

Une application linéaire est définie à l'aide de son libellé (c'est-à-dire de son titre) et de sa matrice associée aux bases respectives de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée (c'est-à-dire qu'elle conserve l'espace dans lequel on commence nos calculs et l'espace de lequel on termine nos calculs).

3) Etude sur les polynômes formels

Dans notre précédent livrable, nous avions défini qu'un polynôme est une expression formée d'une combinaison linéaire de produits de puissances entières d'une ou de plusieurs inconnues. Un polynôme s'écrit toujours de la forme suivante :

$P = a_0+a_1X^1+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ avec P, le polynôme, a_n ses coefficients et X^n des inconnues

Avec l'expression ci-dessus, nous pouvons aborder quelques notions propres aux polynômes :

- Deux polynômes sont égaux si leurs coefficients sont égaux (a_n étant ces coefficients)
- Un polynôme est constant lorsque l'on a : $P = a_0$
- Un polynôme est nul lorsque l'on a : $P = 0$ (donc $a_0 = 0$)

Maintenant, nous allons voir quelques mots de vocabulaire importants lorsque l'on parle des polynômes :

- On appelle degré d'un polynôme son plus grand indice n, c'est-à-dire que c'est le plus grand nombre de l'exposant que l'on trouve dans notre équation du polynôme.
- On parle de polynôme unitaire lorsque le degré de celui-ci est égal à 1.

Désormais, nous connaissons les notions de bases sur les polynômes. Attardons nous sur les applications qui sont liées à ces polynômes.

a) Les dérivées

La notion de dérivée est importante en analyse pour permettre d'étudier les variations d'une fonction par exemple. C'est grâce à cela que l'on peut représenter l'équation d'un polynôme de façon graphique.

La dérivée d'un polynôme est calculée grâce à la formule suivante :

$$P' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k X^{k-1}$$

avec P', la dérivée du polynôme, k, l'indice démarrant à 0 jusqu'à l'infinie, $a_k X^{k-1}$ notre polynôme modifié (avec n étant remplacer par k) et ∑ le symbole mathématique pour représenter la somme.

b) <u>Les primitives</u>

La notion de primitive a un lien direct avec la dérivée. En effet, prenons une fonction F dont sa dérivée de note f, alors la primitive se note : F' = f.

Pour déterminer la primitive d'un polynôme, nous n'avons besoin que d'une formule qui est la suivante : si f = X^n alors $F = \frac{X^{n+1}}{n+1} + c$, où c est une constante.

Maintenant que nous avons abordé ces notions, nous allons voir comment résoudre ces polynômes.

Lorsque l'on parle de racine d'un polynôme, c'est que nous avons déterminé le X qui nous permet d'avoir la solution de l'équation que l'on désire (par exemple X^3+3=0).

Il y a différentes manières de déterminer, de façon informatique, la (ou les) racine d'un polynôme avec plusieurs méthodes qui leurs sont propres. Mais nous discuterons de ces différentes méthodes et de celle que nous avons décidé de choisir pour notre programme dans le prochain livrable.

4) Etude de cas

Suite à une lecture approfondie et des recherches sur les divers éléments demandés, nous avons pu mettre en place le diagramme UML suivant :

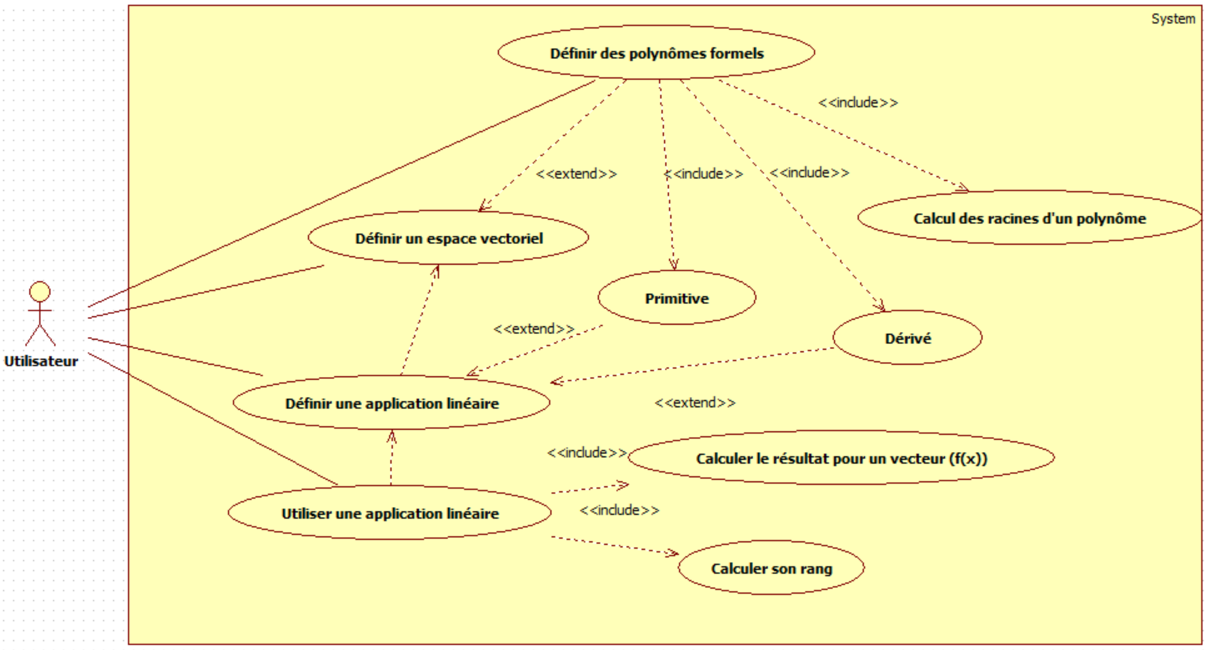

Diagramme UML

Le logiciel est représenté par le rectangle jaune nommé « system ». L'utilisateur a quatre possibilités :

- Définir un espace vectoriel
- Définir une application linéaire
- Définir des polynômes formels
- Utiliser une application linéaire

L'utilisateur devra tout d'abord définir un espace vectoriel ou un polynôme pour pouvoir ensuite y définir des applications linéaires. Sur ces applications, il pourra calculer la valeur associée à un vecteur de l'espace de départ et calculer le rang de l'application. Pour des polynômes il pourra obtenir leurs primitives et leurs dérivés et calculer leurs racines.

L'utilisateur ne pourra pas définir une application linéaire sans avoir défini au moins un espace vectoriel qui représenterait l'espace de départ (sous caution que l'espace d'arrivée soit le même).
Les polynômes sont considérés comme des espaces vectoriels et leurs dérivées et primitives comme des applications linéaires.

Conclusion

Ce livrable nous a éclairé pour la suite de notre projet, nous avons pu mieux définir nos tâches grâce aux différentes recherches que nous avons faites ainsi qu'à l'UML.

Pour notre prochain livrable nous chercherons les méthodes de résolutions pour trouver les racines d'un polynôme de degré 1,2,3,…n, pour calculer le rang d'une application linéaire, pour trouver la primitive d'un polynôme, etc… Nous écrirons les algorithmes en pseudo-code liés aux méthodes de résolution que nous aurons trouvé, pour obtenir une première ébauche de notre programme, et nous pousserons plus loin notre UML, en faisant le diagramme de classe avec les réstrictions etc…, afin d'approfondir notre analyse.