Cartouche du document

Année : ING 1
Matière : Théorie des langages
Activité : Examen

Objectifs

Cet examen porte sur :
- les grammaires régulières et hors contexte
- Les automates finis déterministes ou non
- Langages rationnels : Les quotients gauches et les systèmes d'équations des automates
- Langages algébriques : L'algorithme de CKY et les automates à pile
- Les machines de Türing

Tous les documents sont autorisés

Durée : 2H00 heures

Les ordinateurs sont autorisés mais seulement en fonctionnement local.

Vous devez rendre des copies papiers

Sommaire des exercices

Corps des exercices

1 - Langages et automates

Enoncé :

Soit le langage des chaînes de **a** et de **b** tel que toutes les occurences de **b** soient de longueur **1**. Les chaînes comme **baabaaaa**, **aaaab** et **b** appartiennent au langage.

Question 1)

Enoncé de la question

Barême 2 points

Définir une expression régulière de ce langage en utilisant les opérateurs suivants:
- répétition d'un symbole : ***,+**
- opérateur d'union : **|**

- opérateurs de concaténation : **.**, **(,)**

Exemple $\mathbf{a^+.b(a|b)^*}$

Solution de la question

$(ba|a)^*(b|\varepsilon)$

Question 2)

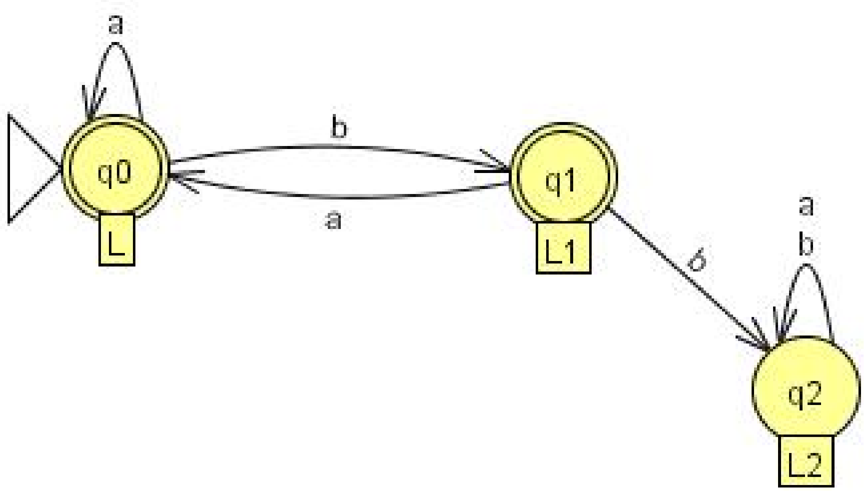
Enoncé de la question

Barême 3 points

Trouver l'automate minimal associé à ce langage par la méthode des quotients gauches.

Solution de la question

$a^{-1}L = L$
$b^{-1}L = L_1 = a(ba + a)^*(b|\varepsilon)|\varepsilon$
$a^{-1}L_1 = L$
$b^{-1}L_1 = \varnothing = L2$
$a^{-1}L_2 = L_2$
$b^{-1}L_2 = L_2$
Les états L et L_1 contiennent le mot vide et sont donc des états terminaux. L'état L est l'état initial. L'état L_2 est l'état poubelle.



Automate minimal de suite de a et b avec des occurences b de longueur 1

Question 3)

Enoncé de la question

Barême 0.5 point

Donner le système d'équations correspondant à cet automate.

Solution de la question

$L = aL + bL_1 + \varepsilon$
$L1 = aL + bL_2 + \varepsilon$
$L2 = (a + b)L_2$

Question 4)

Enoncé de la question

Barême 1.5 points Utiliser le lemme d'Arden afin de vérifier que le langage obtenu par résolution du système d'équation correspond bien à celui trouvé lors de la première question.

Solution de la question

$L_2 = \varnothing$
$L_1 = aL + \varepsilon$
$L = aL + b(aL + \varepsilon) + \varepsilon = (a + ba)L + b + \varepsilon = (a + ba)^*(b + \varepsilon)$

2 - Langages hors contexte

Enoncé :

On considère la grammaire suivante :

// La grammaire de notre petit langage a^nb^n avec $n > 0$
// Cette grammaire est bien algébrique mais pas rationnelle
Les terminaux : T = { a,b }

Les non terminaux : N = { S }

L'axiome : S = S

Régles de production : P = {
Règle : S $\longrightarrow$ a b
Règle : S $\longrightarrow$ a S b
}

Question 1)

Enoncé de la question

Barême 1.5 point

Montrer que la grammaire qui suit est une normalisation au sens de Chomsky de la grammaire ci-dessus.

// La grammaire de notre petit langage $a^n b^n$ avec n > 0
// Cette grammaire est normalisée au sens de Chomsky
Les terminaux : T = { a,b }

Les non terminaux : N = { S, V, B, A }

L'axiome : S = S

Régles de production : P = {
Règle : A —> a
Règle : B —> b
Règle : V —> S B
Règle : S —> A B
Règle : S —> A V
}

Solution de la question

Dans la normalisation de Chomsky, pour chaque terminal x on définit un nouveau non terminal X et une règle X —> x. D'où les deux premières règles : A —> a et B —> b.

La règle S —> a S b devient S —> A S B. Elle ne convient pas car le membre droit a trois termes. Il faut donc la scinder en deux règles en créant un nouveau non terminal V. Celà donne les régles suivantes : V —> S B et S —> A V.

En résumé, on retrouve toutes les règles annoncées.

Question 2)

Enoncé de la question

Barême 2.5 point

Avec la grammaire normalisée au sens de Chomsky ci-dessus, on a appliqué l'algorithme de CKY à la chaîne **a a a b b b**.

On trouve le tableau suivant :

Le mot	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6
a	A	∅	∅	∅	?	?
a	A	∅	∅	S	?	--
a	A	S	V	∅	--	--
b	B	∅	∅	--	--	--
b	B	∅	--	--	--	--
b	B	--	--	--	--	--

La colonne $Etape_j$ représente les sous mots de longueur j. La ligne L_i représente la position du

sous mot dans le mot initial. En résumé, dans la case (i,j) on s'intéresse au sous mot de longueur j extrait du mot initial à partir du symbole i.

1) Compléter le tableau pour finir l'application de l'algorithme de CKY (0.5 pt)

2) Qu'est ce qui indique dans ce tableau complété que la chaîne $a^n b^n$ appartient au langage ? (1 pt)

3) Dans notre cas que signifie de trouver l'axiome S dans la case (3,2) ? (1pt)

Solution de la question

1) On complète le tableau

Le mot	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6
a	A	∅	∅	∅	∅	S
a	A	∅	∅	S	V	--
a	A	S	V	∅	--	--
b	B	∅	∅	--	--	--
b	B	∅	--	--	--	--
b	B	--	--	--	--	--

2) Dans la case (6,6), on trouve l'axiome S. Le mot aaabbb appartient au langage.

3) Cela indique que le sous mot en gras de aa**ab**bb appartient aussi au langage.

Question 3)

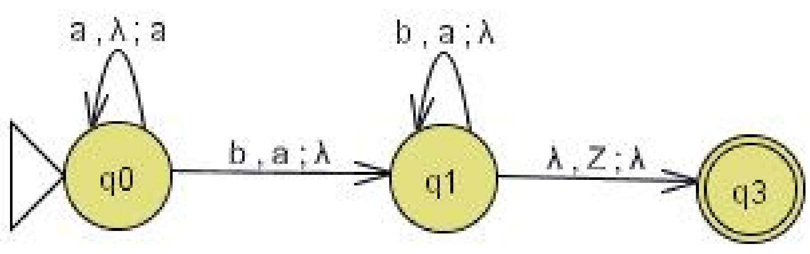
Enoncé de la question

Barême 3 points

On considère le langage $(a^n b^n)^*$.

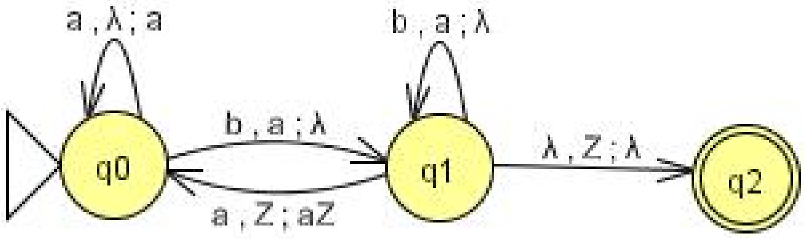
Définir un automate à pile qui reconnaît ce langage.

On vous redonne l'automate à pile du langage $a^n b^n$.



.

Solution de la question



On a simplement ajouté à l'automate $a^n b^n$, une transition de l'état q_1 vers l'état q_0.

3 - Machines de Türing

Question 1)

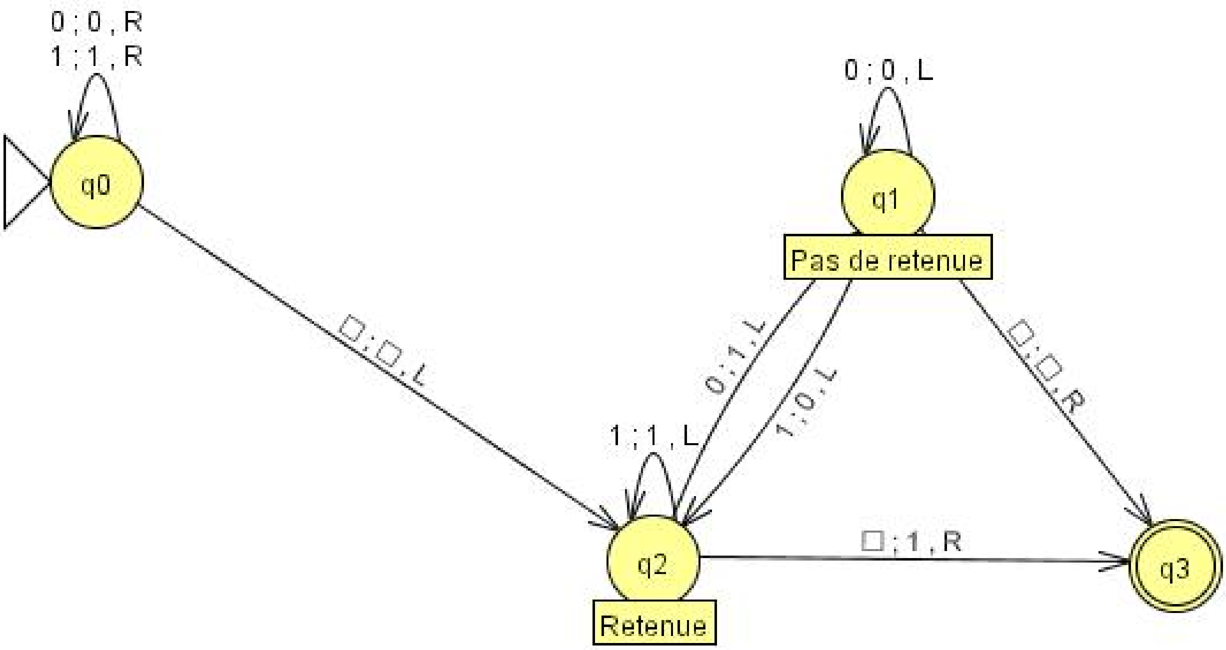
Enoncé de la question

Barême 4 points

Ecrire une machine de Turing qui calcule (écrit sur la bande) le nombre 2* X + 1 à partir du nombre X codé en binaire.

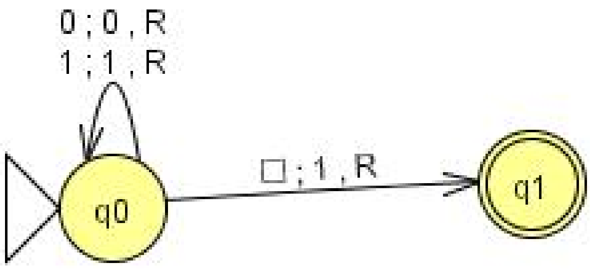
Solution de la question

Une première version calculatoire



.

Une deuxième version maline



.

4 - Un peu de réflexion

Question 1)

Enoncé de la question

Barême 2 points

Sachant que dans un ordinateur, l'enregistrement du code se fait par le même encodage que les données et sur un même support.

Quelle est parmi les trois propositions suivantes celle qui modélise le mieux un ordinateur :
- un automate à états finis
- un automate à pile
- une machine de Turing

Justifier votre réponse.

Solution de la question

Les machines de Turing (MT dans la suite) ne sont pas des machines matérielles destinées à être construites et à être utilisées en pratique. Elles fournissent un modèle théorique pour les ordinateurs et les algorithmes. Elles sont caractérisées par un dispositif que l'on serait tenté de considérer comme physique si elles devaient être réalisées, dispositif commun aux machines de Turing par une fonction de transition, qui dépend de l'algorithme à représenter.

Les MT évoluent par étapes successives, appelées "pas". Le dispositif "physique" est constitué des éléments suivants (voir la figure 1 pour une illustration) :
- une sorte d'"unité centrale" qui contrôle l'ensemble du déroulement du programme et dont le contenu (la fonction de transition) dépend de l'algorithme à exécuter ;
- une sorte de place-mémoire, représentée par une bande infiniment longue, découpée en cases numérotées par les entiers relatifs ; ces cases contiennent initialement les données à traiter ; par la suite, y seront inscrits les calculs intermédiaires et les résultats finaux ;
- une tête de lecture-écriture permettant de lire et éventuellement de modifier le contenu des cases de la bande conformément aux instructions fournies par l'"unité centrale" (accumulateurs

ou registres adresses et de données)

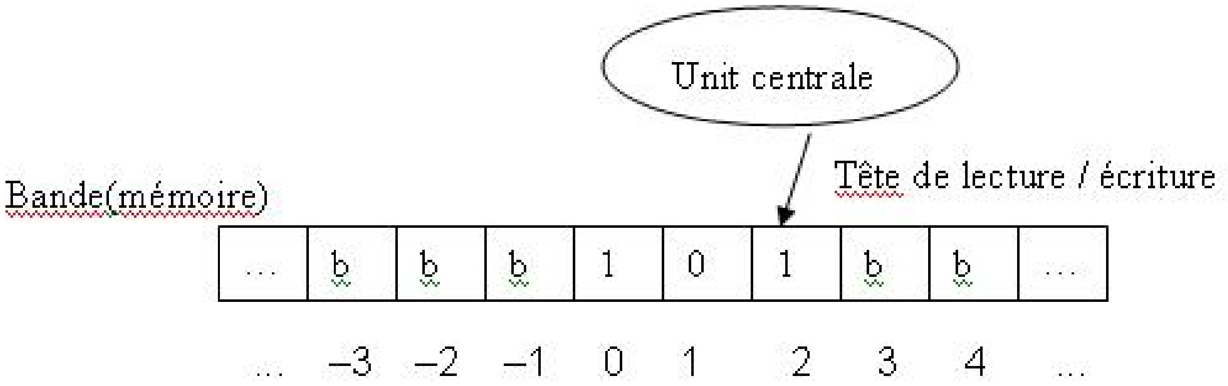


Figure 1 : représentation schématique d'une machine de Turing

.

L'architecture de von Neumann décompose l'ordinateur en 3 parties distinctes :

- L'unité centrale qui est constituée de deux sous unité : l'unité arithmétique et logique (UAL) ou unité de traitement, qui effectue les opérations de base ; et l'unité de contrôle, qui est chargée du séquençage des opérations ;
- la mémoire, qui contient à la fois les données et le programme qui indique à l'unité de contrôle quels calculs faire sur ces données.
- les dispositifs d'entrée-sortie, qui permettent de communiquer avec le monde extérieur.

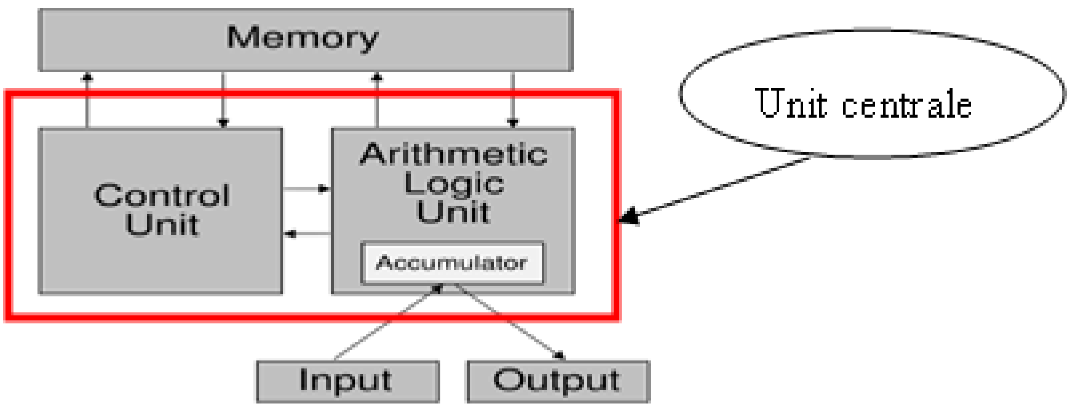


Figure 2 : représentation schématique d'une machine de Von Neumann